Sommes de sev

Définition	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient F et G deux sev de E. On appelle **somme** des sev F et G et on note $\boldsymbol{F+G}$ l'ensemble H défini par $\forall x \in H, \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$
Propriété	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient F et G deux sev de E . $\boldsymbol{F+G}$ **est un sev de** $\boldsymbol{E}$

Preuve

Remarquons que $0_E = 0_F = 0_G$ de plus $0_E = 0_E + 0_E = 0_F + 0_G$ Donc $0_E \in F+G$. $F+G$ est non vide.
Soient x et y deux éléments de $F+G$.
$x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in F^2$.
Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2$$

F est un sev donc $\lambda x_1 + \mu y_1 \in F$
G est un sev donc $\lambda x_2 + \mu y_2 \in G$

On a bien $\lambda x + \mu y \in F+G$
Donc $F+G$ sev

Exemple	Soit E un ev de dimension 3. Soit (e_1, e_2, e_3) une base canonique de cet ev. Soit $F = vect(e_1)$; $G = vect(e_2)$. Alors $F+G$ désigne dans E le sev correspondant au plan vectoriel d'équation $z = 0$
Théorème	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient F et G deux sous parties de E Alors $Vect(F \cup G) = Vect(F) + Vect(G)$

Preuve

Soit $x \in Vect(F \cup G)$. $x = \sum_i \lambda_i x_i$ avec $x_i \in F \cup G$

$$x_i \in F \cup G \Rightarrow \begin{cases} x_i \in F \\ ou \\ x_i \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = x_i + 0 \; avec \; x_i \in F \; et \; 0 \in G \\ ou \\ x_i = 0 + x_i \; avec \; 0 \in F \; et \; x_i \in G \end{cases} \Rightarrow x_i \in Vect(F) + Vect(G) \Rightarrow \lambda_i x_i \in Vect(F) + Vect(G)$$

Donc $x \in Vect(F) + Vect(G) \Rightarrow Vect(F \cup G) \subset Vect(F) + Vect(G)$

Soit $x \in Vect(F) + Vect(G)$.

$x = \sum_i \lambda_i x_i + \sum_j \mu_j y_j$ avec $\forall i \; x_i \in F$ et $\forall j \; y_j \in G$

$$x = \sum_{i,j} \lambda_i x_i + \mu_j y_j$$

Or $\forall i \; x_i \in F \cup G$ et $\forall j \; y_j \in F \cup G$ Donc $x \in Vect(F \cup G)$.

$$Vect(F) + Vect(G) \subset Vect(F \cup G).$$

Nous avons bien $Vect(F \cup G) = Vect(F) + Vect(G)$

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient F et G deux sev de E de dimension finie. $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$

Preuve

Soit $f_1, \dots f_n$ une base de F
Soit $g_1, \dots g_p$ une base de G.
La famille $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p$ est génératrice de $F+G$
En effet $\forall x \in F+G, x = f + g$ avec $f \in F \Rightarrow f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ et $g \in G \Rightarrow g = \sum_{i=1}^p \mu_i g_i$
Donc $x = f + g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i$. Nous avons bien $F+G = vect(f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p)$

La famille $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p$ est une famille génératrice de $F+G$ dont les n premiers vecteurs sont des vecteurs libres.
En appliquant l'algorithme de la base incomplète à cette famille nous allons trouver une base de $F+G$ dont les n premiers vecteurs seront les f_i et qui sera complétée par quelques vecteurs parmi les g_i. Son cardinal sera donc inférieur ou égal à $n+p$, ce qui implique

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{F+G}) \leq \mathbf{dim}(\boldsymbol{F}) + \mathbf{dim}\,(\boldsymbol{G})$$

Remarque

Soient F et G deux sev de E. Soit $x \in F+G$. x peut donc s'écrire $x = x_1 + x_2$. Mais cette écriture est-elle unique ? Reprenons l'exemple de E un ev de dimension 3 avec (e_1, e_2, e_3) sa base canonique.
Soit $F = vect(e_1, e_2)$ et $G = vect(e_2, e_3)$. Soit $H = F + G$

Soit $x = (e_1 + e_2) + e_3$.

$e_1 + e_2 \in F$ et $e_3 \in G$ donc $x \in F + G$.

Mais x peut aussi s'écrire $e_1 + (e_2 + e_3)$ avec $e_1 \in F$ et $e_2 + e_3 \in G$.

Donc la décomposition de x n'est pas unique.

Définition

Soit E un $\mathbb{K} - ev$. Soient F et G deux sev de E
On dit que F et G sont en somme directe si la décomposition de tout élément de $F + G$ en un élément de F auquel on ajoute un élément de G est unique. On utilise alors la notation $F \oplus G$ et non $F + G$

Exemple

Soit E un ev de dimension 3 avec (e_1, e_2, e_3) sa base canonique.
Soit $F = vect(e_1, e_2)$ et $G = vect(e_3)$. Alors F et G sont en somme directe.
En effet. Soit $x \in F + G$. $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $f = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $g = \gamma e_3$
Nous avons $x = \lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3$
Supposons qu'il existe une autre écriture : $x = f' + g' = \lambda' e_1 + \mu' e_2 + \gamma' e_3$
Nous avons $\lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 = \lambda' e_1 + \mu' e_2 + \gamma' e_3$

Soit $(\lambda - \lambda')e_1 + (\mu - \mu')e_2 + (\gamma - \gamma')e_3 = 0$

La famille (e_1, e_2, e_3) étant une base est libre donc $\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \gamma - \gamma' = 0$
L'écriture est donc unique.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K} - ev$. Soient F et G deux sev de E

F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$

Preuve

Supposons F et G en somme directe.
Nous savons que $0_E \in F \cap G$. Mais est-il le seul ?
Soit $x \in F \cap G$ et $x \neq 0_E$. Nous avons $2x = x + x$ avec $x \in F$ et $x \in G$ donc $2x \in F + G$.
Mais $x = 0_E + 2x$ avec $0_E \in F$ et $2x \in G$ donc la décomposition de $2x$ n'est pas unique ce qui est une contradiction.
Seul $0_E \in F \cap G$

Supposons $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $x \in F + G$. Supposons que plusieurs décompositions coexistent. $x = f + g = f' + g'$
Nous avons donc $f - f' = g' - g$
Or $f - f' \in F$ et $g' - g \in G$ donc $f - f' \in F \cap G \Rightarrow f - f' = 0_E \Rightarrow f = f'$ et $g = g'$
L'écriture est donc unique. La somme est bien directe.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K} - ev$. Soient F et G deux sev de E de dimension finie en somme directe.
Soient B et B' des bases de F et G respectivement.
Alors la concaténation de B et de B' est une base de $F \oplus G$.
On dit de cette base qu'elle est adaptée à la décomposition $F \oplus G$
Nous avons donc :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Preuve

Soit $f_1, \dots f_n$ une base de F
Soit $g_1, \dots g_p$ une base de G.
La famille $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p$ est génératrice de $F \oplus G$
En effet $\forall x \in F \oplus G, x = f + g$ avec $f \in F \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ et $g \in G \Rightarrow g = \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i$
Donc $x = f + g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i$.

La famille $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p$ est libre. Considérons $\lambda_1, \dots \lambda_n, \mu_1, \dots \mu_p$ tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \cdots \mu_p g_p = 0$
Nous avons $\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n = -\mu_1 g_1 - \cdots \mu_p g_p$; $\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n \in F$ et $-\mu_1 g_1 - \cdots \mu_p g_p \in G$ donc $\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n \in F \cap G$

$\Rightarrow \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n = 0$ et $-\mu_1 g_1 - \cdots \mu_p g_p = 0$

Les familles f_i et g_i étant libres nous avons $\lambda_1 = \cdots \lambda_n = \mu_1 = \cdots \mu_p = 0$.

En résumé la famille $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p$ est bien une base de $F \oplus G$ et $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Théoreme	Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Soient F et G deux sev de E tels que $E = F + G$. La somme est directe ssi $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Preuve

Nous avons déjà vu que $E = F \oplus G$ implique $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
Réciproquement : Supposons $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
Soit B_1 une base de F. $\dim E = n$
Soit B_2 une base de G. $\dim G = p$
Nous avons déjà vu que la concaténation de B_1 et B_2 que nous appelerons H est une famille génératrice de $F + G$
La famille H possède ses n premiers vecteurs (les vecteurs de B_1) qui constituent une famille libre.

Nous avons vu que en appliquant l'algorithme de la base incomplète à H nous obtenons une base de $F + G$ dont les n premiers vecteurs sont les vecteurs de B_1 et les vecteurs suivants sont extraits des vecteurs de B_2.
Mais $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = |B| + |B'|$ donc cela signifie que nous avons extrait exactement p vecteurs de B' c'est-à-dire B' dans sa totalité. Une base de $F + G$ est donc la concaténation de B et B'

Soit $B = (f_1, \dots f_n)$ et $B' = (g_1, \dots g_p)$
Soit $x \in F \cap G$.

$$x \in F \Rightarrow x = \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n$$
$$x \in G \Rightarrow x = \mu_1 g_1 + \cdots \mu_p g_p$$

$\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n = \mu_1 g_1 + \cdots \mu_p g_p \Rightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = \mu_1 = \cdots \mu_p = 0$ car la famille $B = (f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p)$ est une base.
Donc $F \cap G = \{0_E\}$ et la somme est directe.

Remarque	Nous avons défini la notion de somme directe entre 2 sev. Cette notion se généralise à n sev. Nous aurions pu dès le début présenter des preuves adaptées à n sev mais pour des raisons de clareté nous avons commencé avec $n = 2$
Définition	Soient $F_1, F_2, \dots F_n$ n sev de E. $F_1 + F_2 + \cdots F_n = \{x \in E \ tq \ x = f_1 + f_2 + \cdots f_n$ avec $f_1 \in F_1, \dots f_n \in F_n\}$
Propriété	$F_1 + F_2 + \cdots F_n$ est un sev.

Preuve

$F_1 + F_2 + \cdots F_n = \left(\left(\left((F_1 + F_2) + F_3\right) + F_4\right) + \cdots F_n\right)$. Il suffit de les regrouper deux à deux …..

Définition	Soient $F_1, F_2, \dots F_n$ n sev de E. $F_1, F_2, \dots F_n$ sont dits en somme directe lorsque la décomposition de tout élément x de $F_1 + F_2 + \cdots F_n$ sous la forme $f_1 + f_2 + \cdots f_n$ avec $f_1 \in F_1, \dots f_n \in F_n$ est unique. On écrit alors $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots F_n$
Propriété	Soient $F_1, F_2, \dots F_n$ n sev de E. $F_1, F_2, \dots F_n$ sont en somme directe ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $$F_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} F_k = \{0_E\}$$

Preuve

Supposons $F_1, F_2, \dots F_n$ en somme directe.
Soit $x \in F_i \cap \sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k$ et $x \neq 0$.
$2x = x + x$ le premier x étant dans F_i et le deuxième dans $\sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k$
Mais $2x$ peut aussi s'écrire $2x + 0$ avec $2x$ étant dans F_i et 0 dans $\sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k$ donc il n'y a pas unicité de l'écriture ce qui est problématique. On en déduit que seul $0_E \in F_i \cap \sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k$
Réciproquement. Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $F_i \cap \sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k = \{0_E\}$
Soit $x = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ la décomposition de x selon $F_1, F_2, \dots F_n$
Supposons qu'il y en existe une autre $x = x_1' + x_2' + \cdots x_n'$
Nous avons alors $x_1 + x_2 + \cdots x_n = x_1' + x_2' + \cdots x_n' \Rightarrow x_i - x_i' = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k' - x_k$
$\sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k' - x_k \in \sum_{k=1, k\neq i}^{n} F_k$ et $x_i - x_i' \in F_i$ Donc $x_i - x_i' = 0 \Rightarrow x_i = x_i'$ (Valable $\forall i$)

La décomposition est donc unique.

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient $F_1, F_2, \dots F_n$ n sev de dimension finie en somme directe. Soient $B_1, B_2, \dots B_n$ les n bases de ces sev. Alors la concaténation de $B_1, B_2, \dots B_n$ est une base de $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$. On dit de cette base qu'elle est adaptée à la décomposition $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$ Nous avons donc : $$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k)$$

Preuve

Soit B la concaténation de $B_1, B_2, \dots B_n$.
B est libre et génératrice de $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$. (Reprendre les mêmes étapes qu'avec $n = 2$).
Donc B est une base de $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$. Nous avons bien $\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k)$

Définition	Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Soient F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$ Alors G est appelé un supplémentaire de F dans E
Remarque	G est appelé **un** supplémentaire de F dans E et non **le** supplémentaire car il n'y a pas d'unicité du supplémentaire. Reprenons l'exemple de E un ev de dimension 3 avec (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. Nous avons déjà vu que $E = F \oplus G$ avec $F = vect(e_1, e_2)$ et $G = vect(e_3)$ Soit $H = vect(e_2 + e_3)$ alors nous avons aussi $E = F \oplus H$ En effet soit $x \in E$. $$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1e_1 + x_2e_2 - x_3e_2 + x_3e_2 + x_3e_3 = x_1e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + x_3(e_2 + e_3)$$ $x_1e_1 + (x_2 - x_3)e_2 \in F$ et $x_3(e_2 + e_3) \in H$ donc $x \in H \Rightarrow x \in F + H$ Donc $E \subset F + H$. Comme l'inclusion réciproque est évidente nous avons $E = F + H$ La somme est-elle directe ? Soit $x \in F \cap H$, $x \in F \Rightarrow x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et $x \in G \Rightarrow x = \mu(e_2 + e_3)$ Nous avons donc $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \mu(e_2 + e_3) \Rightarrow \lambda_1 e_1 + (\lambda_2 - \mu)e_2 + \mu e_3 = 0$ La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre nous avons $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$. Donc la somme est directe et $$E = F \oplus G = F \oplus H$$
Théorème	Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Soit F un sev de E. Alors F possède un supplémentaire dans E. Tout supplémentaire de F sera de dimension $\dim(E) - \dim(F)$

Preuve

C'est le théorème de la base incomplète qui nous donne la preuve.
Soit $B = (f_1, \dots f_n)$ une base de F. C'est une famille libre. Il est possible de la compléter avec une famille de vecteurs de E: $(g_1, \dots g_p)$ (nous l'appellerons G) pour que la concaténation de B et G soit une base de E.

Nous avons alors $E = F \oplus vect(G)$

En effet $E = F + vect(G)$ par définition de G.

De plus $x \in F \cap vect(G) \Rightarrow x \in F$ et $x \in vect(G)$
Donc $x = \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n = \mu_1 g_1 + \cdots \mu_p g_p$
$\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n = \mu_1 g_1 + \cdots \mu_p g_p \Rightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = \mu_1 = \cdots \mu_p = 0$ car la famille $B = (f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_p)$ est une base
Donc $F \cap vect(G) = \{0_E\}$ et la somme est directe.

Soit H un supplémentaire de F dans E. $E = F \oplus H \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(H) \Rightarrow \dim(H) = \dim(E) - \dim(F)$

Théorème	**Formule de Grassman**	Soit E un $\mathbb{K}-ev$ (pas forcément de dimension finie) Soient F et G deux sev de E de dimension finie. Alors $F + G$ est de dimension finie Et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Preuve

Nous avons déjà vu que si F et G sont de dimension finie alors $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$
$F+G$ est donc aussi de dimension finie.
Nous avons aussi vu que $F \cap G$ était un sev de E, de F mais aussi de G.
Soit F' le supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Nous avons $F = F \cap G \oplus F'$
Soit G' le supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Nous avons $G = F \cap G \oplus G'$

Montrons que $F + G = F' \oplus G$
$F + G = F + F \cap G + G'$. Or $F + F \cap G = F$. Nous avons donc $F + G = F + G'$
La somme elle directe entre F et G' ?
$x \in F \cap G' \Rightarrow x \in F \; et \; x \in G' \Rightarrow x \in F \; et \; x \in G'$ et $x \in G$ $(G' \subset G) \Rightarrow x \in F \cap G \; et \; x \in G' \Rightarrow x = 0$
(car ces deux ensembles sont en somme directe)

Nous avons donc $F + G = F' \oplus G$
Il vient $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G)$. Or $F = F \cap G \oplus F' \Rightarrow \dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$
Il vient $\dim(F+G) = \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G)$.