Endomorphismes

Théorème du rang (forme géométrique)	Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ev. Soit $u \in \mathcal{L}$(E,F) Soit S un supplémentaire de $Ker\ u$ dans E. Alors $u_{\|S}$ est un isomorphisme de S vers Imu.

Preuve

$\mathrm{Ker}\ u\ \cap S = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}\ u_{|S} = \{0_E\}$. $u_{|S}$ est injective.
De plus $\forall y \in Imu, y = u(x)$ avec $x \in E$. Mais $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}\ u$ et $x_2 \in \mathrm{S}$. Donc $y = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2) = u_{|S}(x_2)$. Donc $u_{|S}$ est surjective.
$u_{|S}$ étant bijective, c'est un isomorphisme.

Théorème du rang	Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ev. Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}$(E,F) alors : $\dim Ker\ u + \dim Im\ u = \dim E$

Preuve

Remarquons que si E est de dimension finie alors $Im\ u$ est de dimension finie. En effet supposons $e_1, \dots e_n$une base de E alors $Imu = Vect[f(e_1), \dots\ f(e_n)]$. D'après le théorème précédent nous avons Imu et S (le supplémentaire de $Ker\ u$ dans E) qui sont isomorphes. Donc $\dim Imu = \dim S$.
Mais S et $Ker\ u$ sont supplémentaires dans E donc $\dim E = \dim S + \dim Ker\ u \Rightarrow \dim E = \dim Im\ u + \dim Ker\ u$.

Exemple	Considérons e_1, e_2, e_3 une base de E. $\dim E = 3$. Considérons u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = u(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$et $u(e_3) = 0$ $x\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Ker\ u\ ssi\ u(x) = 0$ $u(x) = u(ae_1 + be_2 + ce_3) = au(e_1) + bu(e_2) + cu(e_3) = a(e_1 + e_2 + e_3) + b(e_1 + e_2 + e_3) = (a+b)e_1 + (a+b)e_2 + (a+b)e_3$ Donc $u(x) = 0\ ssi\ a + b = 0$ Les vecteurs $u_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont donc des vecteurs de $Ker\ u$. Il est aisé de constater que ces deux vecteurs forment une famille libre. Donc $\dim(Ker\ u) \geq 2$. Peut-on avoir $\dim(Ker\ u) = 3$? Non car si $\dim(Ker\ u) = 3$ alors $\ker u = E$. Or u n'est pas l'application nulle. Cette hypothèse est donc à exclure. Nous avons bien $\dim(\ker u) = 2$ et $\ker u = Vect\ (u_1, u_2)$. D'après le théorème précédent nous avons donc $Dim\ (Imu) = 3 - 2 = 1$. D'après la définition de $u, u_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Imu$. Donc $Im(u) = Vect(u_3)$