Déterminant	
Définition	Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ f est dite uniformément continue sur I ssi : $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0$ tels que $\forall(x, y) \in I^2, \|x - y\| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$
Remarque	La notion de continuité uniforme sur I est différente de la notion de continuité sur un intervalle que nous avons déjà vue. En effet si nous devions traduire que f est simplement continue sur I, nous écririons : $\forall y \in I, \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta_{y,\varepsilon} > 0$ tel que $\forall x \in I, \|x - y\| \leq \eta_{y,\varepsilon} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ Dans cette expression le $\eta_{y,\varepsilon}$ dépend de y et de ε alors que dans l'expression précédente η_ε ne dépendait que de ε. Voila pourquoi ce type de continuité est dit uniforme.
Théorème	Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I

Preuve

Il y a donc une hierachie entre les continuités. Etablissons la.
Soit f uniformément continue sur I.
Soit $y \in I$.
f étant uniformément continue sur I, $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0$ tels que $\forall(x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
Et donc en particulier :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0\ tq\ \forall x \in I, |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ ce qui est la définition de la continuité en y.
Cela étant vrai $\forall\ y \in I$, nous avons la continuité simple sur I.
La continuité uniforme implique donc bien la continuité simple.

Définition	Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. g est dite k −lipschitzienne sur I ssi $\forall(x, y) \in I^2\ \ \|g(x) - g(y)\| \leq k\|x - y\|$
Exemple	Trouver des fonctions k −lipschitziennes dans la nature peut sembler compliqué. L'inégalité des accroissements finis est alors pour nous d'un grand secours. Rappelons la. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$ $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in]a\,;b[\ \|f'(x)\| \leq M \Rightarrow \forall(x, y) \in [a\,;b]^2\ \ \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ Donc trouver une fonction lipschitzienne revient à majorer la dérivée sur un intervalle.
Théorème	Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}, k$ −lipschitzienne sur I Alors g est uniformément continue sur I.

Preuve

Si k est nul, g est constante, donc uniformément continue sur I.
Si $k\ \neq 0, \forall\varepsilon > 0$. Posons $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}$.
g k −lipschitzienne sur Idonc $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$ implique $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \leq k\frac{\varepsilon}{k} \leq \varepsilon$
Nous avons donc bien montré l'existence d'un η_ε tel que $|x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.
La continuité uniforme est donc montrée.

Théorème	Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue sur $[a; b]$ Alors f est uniformément continue sur $[a; b]$. C'est le théorème de Heine.

Preuve

Cela se démontre par l'absurde.
Supposons f non unformément continue sur $[a; b]$.
En prenant la négation de la définition de la continuité uniforme il vient :
$$\exists\varepsilon > 0, \forall\eta > 0\ \exists x\ et\ \exists y \text{ tels que } \in I^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$
Prenons $\eta = \frac{1}{2^n}$;
Pour chaque n, nous avons donc l'existence d'un x_n et d'un y_n tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon\ (*)$
Nous avons crée deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans $[a; b]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass :
il existe une suite extraite de (x_n), appelons la $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers l avec $l \in [a; b]$.
Remarquons que si $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = l$
En effet $|y_{\varphi(n)} - l| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - l| \leq \frac{1}{2^{\varphi(n)}} + |x_{\varphi(n)} - l|$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|x_{\varphi(n)}-l\right|=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\varphi(n)}=0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left|y_{\varphi(n)}-l\right|=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}=l$$

D'après $(*)$ Les deux suites extraites $x_{\varphi(n)}$ et $y_{\varphi(n)}$ vérifient $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \geq \varepsilon\ (**)$

f est continue en l car $l \in [a\,;b]$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)-\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| = \left|f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right)-f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}\right)\right| = |f(l)-f(l)| = 0$

Or cette limite d'après l'inégalité $(*)$ est censée être supérieure à $\varepsilon > 0$

Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

f est donc uniformément continue sur $[a;b]$