Fonctions en escalier et continues par morceaux.

Définition

Soient a et b deux réels avec $b > a$
On appelle subdivision de $[a, b]$ que l'on note σ la famille de réels $\left(x_0, x_1, \dots x_p\right)$ avec :

$$a = x_0,\ x_0 < x_1 < \cdots x_p \text{ et } b = x_p$$

On appelle le pas de cette subdivision le réel $min_{i\in[\![0,p-1]\!]}|x_{i+1} - x_i|$
En d'autres termes le pas d'une subdivision est le plus petit écart entre deux bornes.

Exemple

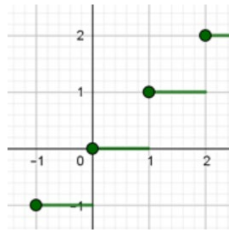
$0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ est une subdivision de $[0; 1]$ de pas $\frac{1}{4}$

Définition

Une fonction f définie sur $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite en **escalier** ssi il existe une subdivision $\sigma = \left(x_0, x_1, \dots x_p\right)$ telle que $\forall x \in]x_i ; x_{i+1}[\ f(x) = \lambda_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
On dit alors que σ est une subdivision adaptée à f.

Exemple

Vous connaissez déjà une fonction en escalier, c'est la fonction partie entière.
Sur $\mathbb{R}^+$, la subdivision $0, 1, 2, \dots$ est adaptée et le pas de cette subdivision est 1.



Remarques

Il peut exister plusieurs subdivisions adaptées à la même fonction en escalier. Reprenons la fonction partie entière : la subdivision $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ ... lui convient aussi tres bien.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ de subdivisions adaptées σ et σ'
Soient λ et μ deux complexes.

- Rajouter un nombre de points fini de $[a, b]$ à σ permet d'obtenir une nouvelle subdivision de $[a, b]$, elle aussi adaptée à f
- $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g
- Les fonctions $Re(f), Im(f), |f|,\ \lambda f + \mu g$ et fg sont des fonctions en escalier.

Preuve

Nous laissons le soin au lecteur d'effectuer ces preuves qui ne présentent pas beaucoup de difficulté.

Définition

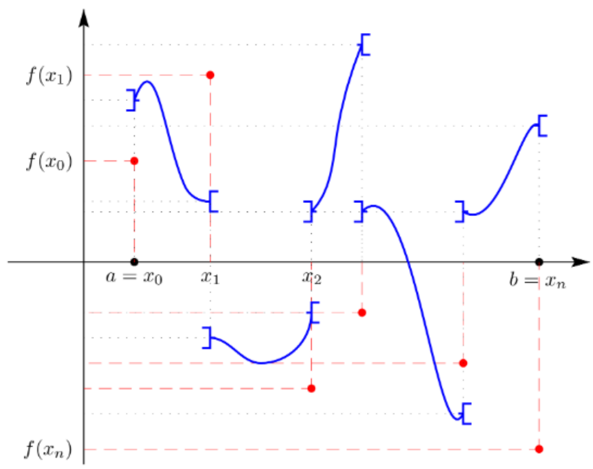
Une fonction f définie sur $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est **continue par morceaux** ssi il existe une subdivision $\sigma = \left(x_0, x_1, \dots x_p\right)$ telle que f soit continue sur tous les intervalles du type $]x_i ; x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i ; x_{i+1}]$.
On dit alors que σ est une subdivision adaptée à f.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est noté $\mathscr{C}_M([a, b\})$

Exemple

Le graphe de la fonction ci-contre est celui d'une foncion continue par morceaux. Vous constatez que sur chaque intervalle du type $]x_i ; x_{i+1}[$ la fonction est continue.
Vous constatez aussi que :
$\lim\limits_{x\to x_i^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f(x)$ sont des limites finies.
Il est donc tout à fait possible sur chaque intervalle du type $]x_i ; x_{i+1}[$ de prolonger f par continuité en une fonction φ_i définie par :

$$\begin{Bmatrix} \forall x \in]x_i ; x_{i+1}[\ \ \varphi_i(x) = f(x) \\ \varphi_i(x_i) = \lim\limits_{x\to x_i^+} f(x) \\ \varphi_i(x_{i+1}) = \lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f(x) \end{Bmatrix}$$

La fonction φ_i ainsi obtenue sera continue sur $[x_i ; x_{i+1}]$



Théorème	Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ est bornée. On peut donc déterminer sa norme infinie $\|\cdot\|_\infty$

Preuve

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$
Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_p)$ une subdivision adaptée à f.
Soit $M^* = \sup(|f(x_0)|, |f(x_1)|, \dots |f(x_p)|)$.
$|f|$ étant définie sur $[a, b], M$ est réel.
Sur chaque intervalle du type $]x_i\,; x_{i+1}[$ $|f|$ est prolongeable par continuité en une fonction φ_i positive, continue sur $[x_i\,; x_{i+1}]$. φ_i étant continue sur $[x_i\,; x_{i+1}]$, d'après le théorème des bornes atteintes nous avons l'existence d'un M_i réel tel que : $\forall x \in [x_i\,; x_{i+1}]\ \varphi_i(x) \leq M_i$
Et donc $\forall x \in]x_i\,; x_{i+1}[\ , |f(x)| \leq M_i$
Prenons $M_\infty = \max_{0 \leq i \leq p-1}(M_i)$ et $M = \max(M_\infty, M^*)$

Nous avons $\forall x \in [a; b], |f(x)| \leq M$

Théorème	Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ est limite au sens de la convergence uniforme d'une suite de fonction en escaliers.

Preuve

Bien entendu une fonction continue sur un intervalle est aussi une fonction continue par morceaux. Nous allons donc restreindre la première partie de notre démonstration aux fonctions continues.

- 1er cas : f est continue sur $[a, b]$

  Nous savons d'après le théorème de Heine que f est uniformément continue sur $[a, b]$
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ tels que $\forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

  Pour un ε donné choisissons n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta_\varepsilon$
  Soit la famille des $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$
  Nous obtenons ainsi une subdivision $(x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a; b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$

  Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a, b]$ par :

  $$\forall x \in]x_k; x_{k+1}[\ \ \varphi_n(x) = f(x_k) \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} \varphi_n(x_k) = f(x_k) \\ \varphi_n(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \end{array} \right\} \ \varphi_n \text{ est une fonction en escalier.}$$

  Pour n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta_\varepsilon$, $[a; b]$ est partagé en segments de longueur $< \eta_\varepsilon$
  $\forall x \in [a; b]$, nous avons $\exists\, k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} x = x_k \\ ou \\ x \in]x_k; x_{k+1}[\end{array} \right\}$

  Dans le premier cas $|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x_k) - \varphi_n(x_k)| = 0$
  Dans le deuxième cas nous avons $|x - x_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \eta_\varepsilon$ donc $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$
  (continuité uniforme de f sur $[a\,; b]$)

  Nous avons donc dans tous les cas $\forall x \in [a; b], |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$
  Nous avons bien $\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]} = 0$

- 2ème cas : f est continue par morceaux sur $[a, b]$

  Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_p)$ une subdivision adaptée à f avec $x_0 = a$ et $x_p = b$
  Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, $f_{]x_k; x_{k+1}[}$ est prolongeable en une fonction f_k continue sur $[x_k; x_{k+1}]$

  D'après le cas précédent f_k est limite au sens de la convergence uniforme d'une suite de fonctions en escalier que nous nommerons $\varphi_{k,n}$

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_k\ tq\ \forall n \geq N_k\ sup_{x \in]x_k; x_{k+1}[} \left|f_k(x) - \varphi_{k,n}(x)\right| \leq \varepsilon$$

  Or n'oublions pas que sur $]x_k; x_{k+1}[f_k(x) = f(x)$ donc :

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_k\ tq\ \forall n \geq N_k\ sup_{x \in]x_k; x_{k+1}[} \left|f(x) - \varphi_{k,n}(x)\right| \leq \varepsilon$$

Soit $N = Max_{k \in [\![0,p-1]\!]}(N_k)$ et soit $n \geq N$

Construisons φ_n la fonction suivante : $\left\{ \begin{matrix} \forall k \in [\![0,p]\!], \varphi_n(x_k) = f(x_k) \\ et \\ \forall x \in]x_k; x_{k+1}[, \ \varphi_n(x) = \varphi_{k,n}(x) \end{matrix} \right\}$; φ_n est une fonction en escalier.

$\forall x \in [a;b]$, nous avons $\exists\, k \in [\![0,p]\!]$ tel que $\left\{ \begin{matrix} x = x_k \\ ou \\ x \in]x_k; x_{k+1}[\end{matrix} \right\}$

Dans le premier cas $|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x_k) - \varphi_n(x_k)| = 0$
Dans le deuxième cas nous avons $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \left|f(x) - \varphi_{k,n}(x)\right| \leq sup_{x \in]x_k;x_{k+1}[}\left|f(x) - \varphi_{k,n}(x)\right| \leq \varepsilon$

Nous avons donc dans tous les cas $\forall x \in [a;b], |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$
Nous avons bien là aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]} = 0$

Remarque	La convergence uniforme d'une suite de fonctions en escalier vers une fonction continue par morceaux va nous être très utile par la suite. En effet nous allons établir des propriétés sur les fonctions en escaliers qui grâce à cette convergence vont pouvoir être étendues aux fonctions continues par morceaux.