

Formes linéaires (Rappels)

Définition	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev. On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
Exemple	Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\varphi: \left\{ A \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{k=1}^n a_{k,k} \right\} \text{ est une forme linéaire.}$ On appelle $\varphi(A)$ la trace de A (somme des éléments de sa diagonale) et on note $\varphi(A) = tr(A)$
Preuve	
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $tr(\lambda A + \mu B) = tr \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} + \mu b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n,1} + \mu b_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,n} + \mu b_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda a_{k,k} + \mu b_{k,k} = \lambda \sum_{k=1}^n a_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^n b_{k,k} = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$	
Définition	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Soit $i \in I$. L'application qui à tout x de E associe sa i –ième coordonnée est appelée la i –ième forme coordonnée de E et est notée $e_i^*(x)$. Par définition nous avons donc si $x \in E, x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$
Exemple	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev muni d'une base (e_1, e_2, e_3) et soit le vecteur $x = e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Nous avons $e_1^*(x) = 1; e_2^*(x) = -2; e_3^*(x) = +3$; Nous avons donc bien $x = e_1^*(x)e_1 + e_2^*(x)e_2 + e_3^*(x)e_3$
Propriété	Les formes coordonnées sont des formes linéaires, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
Preuve	
Soient x et y deux vecteurs de $E. x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i \in I} x_i e_i + \mu \sum_{i \in I} y_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$ Donc $\forall i \in I, e_i^*(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y)$ donc e_i^* est linéaire.	
Définition	Le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur un $\mathbb{K}$ – ev est appelé un hyperplan.
Propriété	En dimension finie, si n représente la dimension du $\mathbb{K}$ – ev de départ, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.
Preuve	
Soit E un $\mathbb{K}$ – ev de dimension n. Soit H un hyperplan. Il est défini comme le noyau d'une forme linéaire sur E. Donc $H = Ker f$ avec f forme linéaire sur E. $Im f = \mathbb{K}$. Donc $\dim(Im f) = 1$. En appliquant le théorème du rang, il vient $\dim H = \dim(Ker f) = n - 1$. Réciproquement : Soit F un sev de E de dimension $n - 1$. Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de la compléter par un vecteur e_n de E tel que $B' = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E. Considérons l'application linéaire définie par $\forall x \in E, f(x) = e_n^*(x)$ Cette application est à valeur dans $\mathbb{K}$. C'est une forme linéaire. $x \in Ker f \Leftrightarrow f(x) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow e_n^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ F est bien le noyau d'une forme linéaire.	
Remarque	En dimension finie un hyperplan est représenté par l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.
Exemple	Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble S des solutions de l'équation $x - 2y + 3z = 0$ Nous pouvons considérer S comme $Ker f, f$ étant définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = e_1^*(x) - 2e_2^*(x) + 3e_3^*(x)$ f est une combinaison linéaire de formes linéaires. C'est donc une forme linéaire. S est donc le noyau d'une forme linéaire. C'est un hyperplan. Géométriquement nous constatons que dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, S d'équation $x - 2y + 3z = 0$ représente un plan vectoriel de dimension 2. Nous avons bien un hyperplan.
Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev. H est un hyperplan dans $E \Leftrightarrow E = H \oplus D$ avec D droite vectorielle non contenue dans H
Preuve	

Soit H un hyperplan. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ . Donc $\exists v \in E$ telle que $v \notin \ker \varphi$.
 Nous allons montrer que $E = H \oplus \text{Vect}(v)$
 $x \in H \cap \text{Vect}(v) \Rightarrow \varphi(x) = 0$ et $x = kv$. Or si $x = kv$ alors $\varphi(x) = \varphi(kv) = k\varphi(v)$ or $\varphi(v) \neq 0$ donc $\varphi(x) = 0$ ssi $k = 0$ ssi $x = 0$. L'intersection de ces deux ensemble est donc réduite au vecteur nul.
 Soit $x \in E$. $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0$ donc $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v \in \ker \varphi$. Soit u ce vecteur.
 Nous avons $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v = u \Rightarrow x = u + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ Donc $E = H + \text{Vect}(v)$. Nous avons bien $E = H \oplus \text{Vect}(v)$.
 Réciproquement : Supposons $E = H \oplus D$ avec $D = \text{vect}(v)$ avec $v \in E$
 Donc $\forall x \in E, x = x_H + x_D = x_H + \lambda_x v$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$.
 Construisons l'application φ telle que $\forall x \in H \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in D \varphi(x) = \lambda_x$
 Nous avons donc $\forall x \in E, \varphi(x) = \lambda_x$.
 Montrons que φ est linéaire.
 $\varphi(x) = \lambda_x$; $\varphi(y) = \lambda_y$; $\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi\left(\lambda(x_H + \lambda_x v) + \mu(y_H + \lambda_y v)\right) = \varphi(\lambda x_H + \mu y_H + (\lambda \lambda_x + \mu \lambda_y)v) = \lambda \lambda_x + \mu \lambda_y$
 $\lambda x_H + \mu y_H \in H$ donc $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \lambda_x + \mu \lambda_y = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$.
 φ est bien linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$, c'est donc une forme linéaire. $\ker \varphi = H$. **Donc H est bien un hyperplan.**

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev. Soit H un hyperplan noyau de deux formes linéaires φ et ψ . Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda \psi$
-----------------	---

Preuve

H noyau de la forme linéaire : φ . Donc d'après le théorème précédent $E = H \oplus \text{Vect}(v)$ avec $\varphi(v) \neq 0$ ($v \notin H$)
 Comme $v \notin H$, on a aussi $\psi(v) \neq 0$.
 Soit $x \notin H, x = x_H + \lambda_x v$ avec $\lambda_x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_H + \lambda_x v) = \varphi(x_H) + \lambda_x \varphi(v) = \lambda_x \varphi(v) \\ \psi(x) &= \psi(x_H + \lambda_x v) = \psi(x_H) + \lambda_x \psi(v) = \lambda_x \psi(v) \end{aligned}$$

 Donc $\psi(x) = \varphi(x) * \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$;
 Si $x \in H, \psi(x) = \varphi(x) = 0$ donc on a aussi $\psi(x) = \varphi(x) * \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$

$$\forall x \in E, \psi(x) = \varphi(x) * \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$$

Remarque	Cela signifie concrètement qu'un hyperplan possède une seule équation.
-----------------	--

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev de dimension n . L'intersection de p hyperplans de E est un sous espace vectoriel de E de dimension au moins $n - p$
-----------------	---

Preuve

Soit E un $\mathbb{K}$ – ev de dimension n .
 Soient $H_1, H_2, \dots, H_p$ p hyperplans de E .
 Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ les p formes linéaires correspondantes.
 On construit sur E l'application φ telle que $\forall x \in E, \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix}$.
 φ est une forme linéaire de E sur $\mathbb{K}^p$. (Le vérifier).
 Le théorème du rang nous donne :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi$$

 $\ker \varphi = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$. Nous avons déjà vu que l'intersection de plusieurs ev est un ev .

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) = \dim E - \dim \text{Im } \varphi$$

 Or $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}^p \Rightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) \leq p \Rightarrow \dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ – ev de dimension n . Tout sous espace de dimension $n - p$ est l'intersection d'exactements p hyperplans de E .
-----------------	--

Preuve

Soit F un *sev* de dimension $n - p$.

Soit $e_1, e_2, \dots, e_{n-p}$ une base de F que l'on complète avec $e_{n-p+1}, \dots, e_n$ pour avoir une base de E .

Soient $e_{n-p+1}^*, \dots, e_n^*$ les p formes coordonnées correspondant à $e_{n-p+1}, \dots, e_n$.

$\forall x \in F, x \in e_j^*$ avec $n - p + 1 \leq j \leq n$ Donc $F \subset \text{Ker}(e_{n-p+1}^*) \cap \dots \cap \text{Ker}(e_n^*)$

Réciproquement : Si $x \in \text{Ker}(e_j^*)$ avec $n - p + 1 \leq j \leq n$ alors $x \in \text{Vect}(e_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}}$

Donc si $x \in \text{Ker}(e_{n-p+1}^*) \cap \dots \cap \text{Ker}(e_n^*)$ alors $x \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-p}) \Rightarrow x \in F$

D'où $F = \text{Ker}(e_{n-p+1}^*) \cap \dots \cap \text{Ker}(e_n^*)$

F est bien l'intersection d'exactly p hyperplans de E .