Lien primitive intégrale.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec a et b deux réels dans I.
La fonction $F:\begin{Bmatrix} I \to \mathbb{C} \\ x \to \int_a^x f(t)dt \end{Bmatrix}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Preuve

Pour montrer que F est une primitive de f sur I il nous faut montrer que F est dérivable sur I et que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Une manière astucieuse d'écrire $f(x_0)$ est $f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$ avec $h \neq 0$
Nous avons alors :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\,dt$$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\,dt\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ dt\right|$$

Si $h > 0$ nous avons :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\ dt\ \ (*)$$

Si $h < 0$ nous avons :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\left|\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) - f(x_0)\ dt\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\ dt\ (**)$$

f est continue en x_0. Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \eta > 0\ tq\ \forall x \in [\,x_0 - \eta; x_0 + \eta]\ \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

En choisissant h tel que $|h| < |\eta|$ nous avons donc $\forall t \in [\,x_0 - |h|; x_0 + |h|]\ |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
$(*)$ devient donc :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\ \ dt \leq h\varepsilon\left|\frac{1}{h}\right| \leq \varepsilon$$

Et $(**)$ devient donc :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right|\int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon\ \ dt \leq |h|\varepsilon\left|\frac{1}{h}\right| \leq \varepsilon$$

Nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \eta > 0\ tq\ \forall h \in [\,-\eta; +\eta]\ \ \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Cela entraine :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(\,x_0\,)$$

F est donc dérivable en x_0 et son nombre dérivé est $f(x_0)$. Nous avons donc $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.
F est donc bien une primitive de f s'annulant en a. Est-ce la seule ? Oui car nous savons que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Donc si G est une autre primitive de f s'annulant en a, nous avons $G = F + \lambda$.

$$G(a) = F(a) + \lambda \Rightarrow 0 = 0 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$$

G et F sont donc identiques.

Remarques :	Nous venons de rajouter une hypothèse à la fonction f : la **continuité** et non plus la simple continuité par morceaux. Cela n'est pas anodin. En effet si une fonction continue par morceaux admet une intégrale, elle ne possède pas forcément une primitive. Prenons la fonction définie sur $f = 1_{[0\,;1]}$. $\forall x \in [0\,;1]\; f(x) = 1$ et $\forall x \in]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[\; f(x) = 0$ Supposons que f admette une primitive F. Nous avons $\forall x \in [0\,;1]\;\; F' = 1$ et $\forall x \in]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[\;\; F' = 0$ Nous avons donc $\forall x \in [0\,;1]\; F(x) = x + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[\;\; F(x) = \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ F étant continue sur $\mathbb{R}$, nous avons $F(0) = \lambda = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = \mu$ Mais $F(1) = 1 + \lambda = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \mu$ ce qui nous amène à une contradiction.
Propriété	Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec a et b deux réels dans I. Soit F une primitive quelconque de f Alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Preuve

Soit $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Nous avons vu que G est une primitive de f s'annulant en a. $\int_a^b f(t)dt = G(b) - 0 = G(b) - G(a)$
Soit F une autre primitive de f. Nous savons que F et G sont liées par $F = G + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

Il vient $\int_a^b f(t)dt = (F(b) - \lambda) - (F(a) - \lambda) = F(b) - F(a)$

Remarque	Nous l'avions admis jusqu'à présent, nous avons maintenant la preuve immédiate de $$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$
Propriété	Intégraton par partie. IPP Soient f et g deux fonctions appartenant à $C^1([a\,;b],\mathbb{C})$ $$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Preuve

La fonction $t \to f(t)g(t)$ est dérivable sur $[a\,;b]$

$$[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$t \to f(t)g(t)$ est donc la primitive de la fonction $t \to f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$
Nous avons donc $\int_a^b f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) \Rightarrow \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Propriété	Changement de variable. Soit φ une fonction $C^1([a\,;b],J)$ avec $J \subset \mathbb{R}$ Soit f une fonction continue de J dans $\mathbb{C}$ $$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Preuve

f est continue de J dans $\mathbb{C}$ donc admet une primitive F.
φ est dérivable continument sur $[a\,;b]$ et F est dérivable sur J
Donc $\forall x \in [a\,;b]$, $(Fo\varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$
Remarquons que :

$$\int_a^b (Fo\varphi)'(x)dx = [Fo\varphi]_a^b = Fo\varphi(b) - Fo\varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Nous en déduisons d'après $(*)$ que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b (Fo\varphi)'(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x)) * \varphi'(x)dx$$

Propriété	Nous l'avions admis dans le cas d'une fonction continue par morceaux, nous pouvons le démontrer dans le cas d'une fonction continue. Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$. On suppose f périodique de période T Alors $\forall a \in \mathbb{R}$ $$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Preuve

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

Or le changement de variable $\varphi(t) = t + T$ avec $\varphi'(t) = 1$ nous donne :

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt$$

Nous avons donc $\int_a^{a+T} f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$