Intégrale d'une fonction continue par morceaux

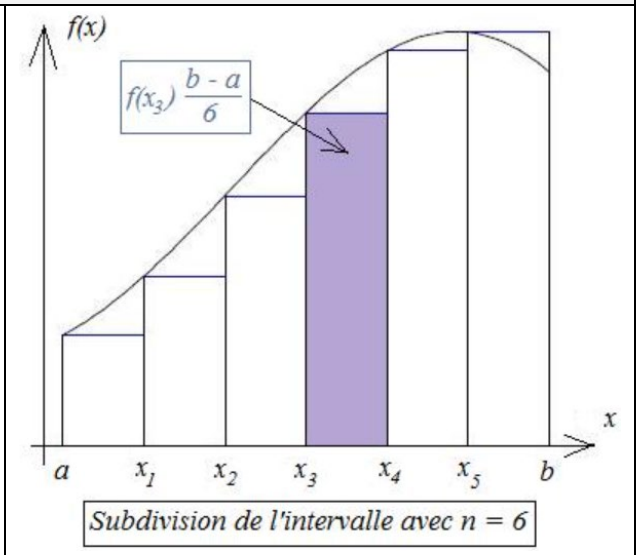
Définition Propriété

Soit f une continue par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$
Alors la suite $\int_a^b \varphi_n(t)dt$ converge et sa limite ne dépend que de f et pas de φ_n.
Cette limite est appelée **intégrale** de f sur $[a,b]$ et est notée $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt}$

Remarque

Sur le shéma ci-contre nous avons approché une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ par une fonction en escalier. La subdivision de l'intervalle avec $n=6$ nous donne une approximation grossière de f. Lorsque n va augmenter, les rectangles seront plus étroits et recouvreront de plus en plus parfaitement la zone comprise entre l'axe des abscisse et la courbe.

Nous pouvons donc ainsi conjecturer que si φ_n est une suite de fonctions en escalier convergeant vers f, la limite de $\int_a^b \varphi_n(t)dt$ aussi appelée $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt}$ correspond à l'aire de la zone située entre l'axe des abscisses et la courbe.



Preuve

- 1ere étape : Montrons que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $\left(\int_a^b \varphi_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt\right| \le (b-a)\|\varphi_n\|_\infty \le (b-a)\|\varphi_n - f + f\|_\infty \le (b-a)\|\varphi_n - f\|_\infty + (b-a)\|f\|_\infty$$

Nous savons que $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n - f\|_\infty = 0$; donc $\exists N$ tel que $\forall n \ge N\ \|\varphi_n - f\|_\infty \le 1$
Nous avons donc $\forall n \ge N\ \left|\int_a^b \varphi_n(t)dt\right| \le (b-a) + (b-a)\|f\|_\infty \le (b-a)(1+\|f\|_\infty)$
La suite $\int_a^b \varphi_n(t)dt$ est donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, il existe une suite extraite de $\left(\int_a^b \varphi_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.
Soit $\left(\int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)dt\right| = \left|\int_a^b \varphi_n(t) - \varphi_{\psi(n)}(t)dt\right| \le (b-a)\left\|\varphi_n - \varphi_{\psi(n)}\right\|_\infty$$
$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)dt\right| \le (b-a)\|\varphi_n - f\|_\infty + (b-a)\left\|f - \varphi_{\psi(n)}\right\|_\infty$$

Par hypothèse $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\left\|\varphi_{\psi(n)} - f\right\|_\infty = 0$
Donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)dt\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)dt$
Nous avons donc montré que la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

- 2ème étape : Montrons que la limite de cette suite ne dépend pas de φ_n mais seulement de f

Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions convergeant vers f

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \psi_n(t)dt\right| = \left|\int_a^b \varphi_n(t) - \psi_n(t)\,dt\right| \le (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \le (b-a)\|\varphi_n - f\|_\infty + (b-a)\|f - \psi_n\|_\infty$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\|\psi_n - f\|_\infty = 0$ par hypothèse.
Donc $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)dt$.
La limite de l'intégrale de deux suites de fonctions convergeant vers f est donc identique. Quelque soit la suite de fonction convergeant uniformément vers f, la limite de son intégrale ne dépend que de f.