

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition Propriété

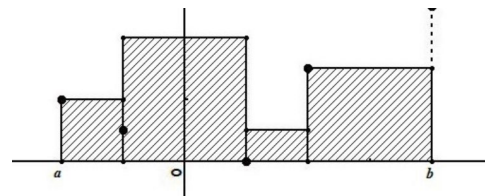
Soit f une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ une subdivision adaptée à f
En désignant par y_k la valeur de f prise sur $]x_k; x_{k+1}[$ nous noterons :

$$I_\sigma = \sum_{k=0}^{p-1} y_k (x_{k+1} - x_k)$$

I_σ est appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$, est notée $\int_a^b f(t) dt$ et ne dépend pas de σ

Remarque

Dans le cas d'une fonction en escalier à valeurs réelles positive, l'intégrale revient à calculer l'aire de rectangles et donc l'aire comprise entre les valeur $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe.
Lorsque la fonction prend des valeurs négatives, on parle alors d'aire algébrique.



Preuve

Il faut démontrer que I_σ ne dépend pas de σ et prend la même valeur sur n'importe quelle autre subdivision σ' adaptée à f . Nous allons le démontrer en deux étapes.

- 1^{ère} étape : Soient $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ et σ' deux subdivisions adaptées à f avec σ' incluse dans σ
Il existe une fonction $\varphi: [0; p'] \rightarrow \mathbb{N}$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(p') = p$ telle que $\sigma' = (x_{\varphi(0)}, x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(p')})$
Notons que φ est strictement croissante.

$$I_{\sigma'} = \sum_{k=0}^{p'-1} y'_k (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}) \text{ en notant } y'_k \text{ la valeur prise par } f \text{ sur }]x_{\varphi(k)}; x_{\varphi(k+1)}[$$

Mais $x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)} = \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(k+1)-1} x_{j+1} - x_j$; Notons que y'_k prend sur chaque intervalle $]x_j; x_{j+1}[$ toujours la même valeur que nous noterons y_j

Nous avons donc :

$$I_{\sigma'} = \sum_{k=0}^{p'-1} y'_k (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}) = \sum_{k=0}^{p'-1} y'_k \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(k+1)-1} x_{j+1} - x_j = \sum_{k=0}^{p'-1} \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(k+1)-1} y_j (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{p-1} y_j (x_{j+1} - x_j) = I_\sigma$$

- 2^{ème} étape : Soient σ et σ' deux subdivisions différentes adaptées à f
Nous avons vu que $\sigma \cup \sigma'$ était aussi une subdivision adaptée à f . σ et σ' sont deux subdivisions incluses dans $\sigma \cup \sigma'$. Nous avons donc :

$$I_{\sigma'} = I_{\sigma \cup \sigma'} = I_\sigma$$

Propriété

Soient f et g deux fonctions en escalier définies sur $[a; b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soient λ et μ deux complexes.
L'intégrale est une fonction linéaire. Autrement dit :

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Preuve

Soient σ et σ' deux subdivisions adaptées à f et g .
Ces deux subdivisions sont incluses dans la subdivision $\sigma \cup \sigma' = (x_0, x_1, \dots, x_p)$.
Cette dernière subdivision est adaptée à f et g donc à $\lambda f + \mu g$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } \int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt &= \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) (\lambda f(\tilde{x}_k) + \mu g(\tilde{x}_k)) ; \tilde{x}_k \text{ étant une valeur de l'intervalle }]x_k; x_{k+1}[\\ \int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt &= \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) (\lambda f(\tilde{x}_k)) + \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) (\mu g(\tilde{x}_k)) = \lambda \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) f(\tilde{x}_k) + \mu \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) g(\tilde{x}_k) \\ &= \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

Propriété

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a; b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b - a) \|f\|_{\infty, [a; b]}$$

Preuve

Remarquons qu'une fonction en escalier définie sur un intervalle est aussi une fonction continue par morceaux définie sur le même intervalle donc bornée sur cet intervalle et admettant une borne infinie. La double inégalité précédente a donc du sens.

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ une subdivision adaptée à f ; $a = x_0$ et $x_p = b$

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) f(\widetilde{x}_k) ; \widetilde{x}_k \text{ étant une valeur de l'intervalle }]x_k; x_{k+1}[$$

$$\text{Donc } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) f(\widetilde{x}_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) |f(\widetilde{x}_k)|$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) |f(\widetilde{x}_k)| = \int_a^b |f(t)| dt \text{ donc } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

La première partie de l'inégalité est démontrée.

$$\text{Revenons à : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) |f(\widetilde{x}_k)| ; \forall k |f(\widetilde{x}_k)| \leq \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \leq \|f\|_{\infty, [a; b]}$$

$$\text{Donc } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) \|f\|_{\infty, [a; b]} \leq \|f\|_{\infty, [a; b]} \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) \leq \|f\|_{\infty, [a; b]} (b - a)$$

La deuxième partie de l'inégalité est donc démontrée.

Propriété	Soit f une fonction en escalier définie sur $[a; b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose f nulle sauf en un nombre fini de points. Alors $\int_a^b f(t) dt = 0$
Preuve	
	Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ une subdivision adaptée à f $I_\sigma = \sum_{k=0}^{p-1} y_k (x_{k+1} - x_k)$ Or $\forall k, y_k = 0$ donc $I_\sigma = \int_a^b f(t) dt = 0$
Propriété	Soit f une fonction en escalier définie sur $[a; b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous admettrons pour l'instant que : $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$