Sommes de Riemann

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.

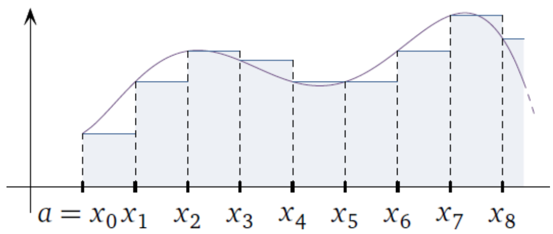
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

De plus si $f \in C^1([a;b],\mathbb{R})$ alors

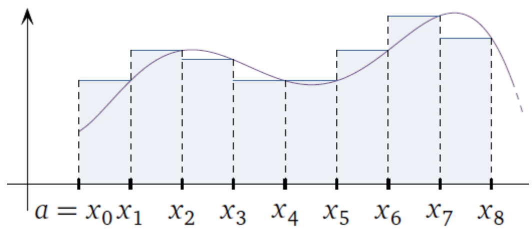
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Preuve

Nous n'allons démontrer la première double égalité de ce théorème que dans le cas où f est continue.
Pour se représenter les sommes de Riemann rien de tel qu'un petit shéma



$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$



$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Dans les deux cas nous approximons l'aire sous la courbe soit l'intégrale par la somme des aires des rectangles représentés ci-dessus. Plus la largeur des rectangles est petite, plus cette approximation devient précise. A l'infini cette approximation n'en est plus une.

Nous allons démontrer le premier cas. Il suffit de construire la fonction en escalier φ_n définie par :

$$\varphi_n(x) = f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) \text{ pour } x \in [\frac{k(b-a)}{n};\ \frac{(k+1)(b-a)}{n}] \text{ avec } 0 \le k \le n-1$$

f étant continue sur $[a;b]$ elle l'est uniformément. Cela signifie que :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0 \text{ tq } \forall x\in[a\,;b]\ \forall y\in[a\,;b],\ |x-y|\le\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\varepsilon$$

Choisissons n pour que $\frac{(b-a)}{n} \le \eta$

$\forall x\in[a\,;b]\ \exists k\in[\![0;n-1]\!]$ tel que $a+\frac{k(b-a)}{n} \le x \le a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}$

Nous avons donc $|f(x)-\varphi_n(x)| \le |f(x) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)|$ mais x et $a+\frac{k(b-a)}{n}$ sont distants d'une longueur $\le \frac{(b-a)}{n} \le \eta$

Donc $\left|f(x)-f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right| \le \varepsilon$

Il vient donc :

$$\forall x\in[a\,;b]\ |f(x)-\varphi_n(x)| \le \varepsilon \Rightarrow \|f-\varphi_n\|_{\infty,[a;b]} \le \varepsilon`$$

$$\text{Nous avons donc } \lim_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_{\infty,[a;b]} = 0$$

La fonction φ_n converge uniformément vers f.

$$\text{Donc } \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Dans le deuxième cas il suffit de construire la fonction en escalier φ_n par :

$$\varphi_n(x) = f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) \text{ pour } x \in [\frac{(k-1)(b-a)}{n};\ \frac{(k)(b-a)}{n}] \text{ avec } 1 \le k \le n$$

Le reste de la démonstration est identique.

Dans le cas où f est lipschitzienne de paramètre K, nous pouvons majorer l'erreur.
En effet reprenons le premier cas :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)dx\right|$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(x) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)dx\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(x) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)dx\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(x) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} K\left(x-a-\frac{k(b-a)}{n}\right) \leq K\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(x-a-\frac{k(b-a)}{n}\right)^2\right]_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}}$$

$$\leq \frac{K}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{n^2} \leq \frac{K}{2}\frac{(b-a)^2}{n}$$

Nous avons bien $\frac{K}{2}\frac{(b-a)^2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Exemple	Considérons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ En posant $a = 0\,;b = 1$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous avons $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ La fonction f étant continue par morceaux sur $[0\,;1]$ Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [Arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$