Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$
Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{C})$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.
Soient a et b dans I

Alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Preuve

La preuve se démontre par récurrence.
Initialisation $n = 0$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt$$

L'initialisation est donc vérifiée.
Hérédité :

Supposons que si $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{C})$ alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ et montrons le au rang suivant.
Supposons $f \in C^{n+2}(I, \mathbb{C})$. A fortiori elle est appartient aussi à $C^{n+1}(I, \mathbb{C})$.
Nous pouvons donc écrire $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k\,!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)dt\ (*)$

Réalisons une intégration par parties sur le denier terme intégral.
$t \to \frac{(-1)(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!}$ et $t \to f^{(n+1)}(t)$ sont C^1 sur I. Donc

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)dt = \left[(-1)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b (-1)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)dt$$
$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Nous avons donc en injectant ce résultat dans $(*)$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k\,!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k\,!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)dt$$

L'égalité est donc vérifiée à l'ordre $n + 1$
En conclusion nous avons donc bien :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exemple

Posons $f = \ln(1 + x)$
$f \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ avec $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$
Nous avons donc à l'ordre 2 :

$$\forall x \in [0,1], \ln(1+x) = \ln 1 + (x-0) * \frac{1}{1+0} + \frac{(x-0)^2}{2} * -\frac{1}{(1+0)^2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(2)\,!} \frac{2}{(1+t)^3} dt$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt$$

Nous avons donc $\forall x \in [0,1]\ \ln(1+x) \geq\ x - \frac{x^2}{2}$

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$
Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{C})$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.
Soient a et b dans I

Alors $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}\right| \leq \left|\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a;b]}$

Preuve

$f \in C^{n+1}(I, \mathbb{C})$ donc $\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a;b]}$ existe bien.
Alors $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}\right| \leq \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right|$ (Formule de Taylor avec Reste intégral)

Donc $\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k\,!}\right| \le \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n\,!}\right| \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} dt \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!}\,dt$ (dans le cas où $a \le b$)

Il vient :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k\,!}\right| \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!}\right]_a^b \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \left|\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Dans le cas où $a \ge b$

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}\right| \le \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,dt \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)\,!}\right]_b^a$$

$$\le \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a\,;b\}} \left|\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Exemple

Reprenons l’exemple précédent.

$$\forall x \in [0,1],\ \left|\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right| \le \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,dt \le \int_0^x (x-t)^2 dt = -\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x \le -\left[0-\frac{x^3}{3}\right] \le \frac{x^3}{3}$$

On aurait pu étudier la fonction $f_x(t)=\frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}$ pour donner $\|f_x\|_{\infty,[0\,;x\}}$ mais les majorations précédentes ont plus de sens.