Produit scalaire

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$ −ev
On appelle produit scalaire une forme bilinéaire $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ symétrique, définie, positive.
Lexique :

- φ **symétrique** $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \; \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- φ **positive** $\Leftrightarrow \forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$
- φ **définie** $\Leftrightarrow \forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Le produit scalaire entre deux vecteurs x et y peut aussi être noté $(x|y)$ ou $x.y$

Exemple

Posons $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$
φ définie par $\forall (f,g) \in E^2 \; \varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire.

Preuve

La linéarité de l'intégrale nous donne la **bilinéarité** de φ
$\forall (f,g) \in E^2 \; \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx$ donc φ est **symétrique**.
$\forall\, f \in E, \varphi(f,f) = \int_0^1 f^2(x)dx.\; x \to f^2(x)$ est positive sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 0 \Rightarrow \varphi$ **positive**
$\forall\, f \in E \; \varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0;1] \; f^2(x) = 0 \; (car\; f^2 continue) \Leftrightarrow \forall x \in [0;1] \; f(x) = 0 \Rightarrow \varphi$ **définie**

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.
φ définie par $\forall (X,Y) \in E^2 \; \varphi(X,Y) = {}^{t}XY$ est un produit scalaire.
φ est appelé produit scalaire **canonique** sur $\mathbb{R}^n$

Preuve

$\forall (X_1, X_2, Y) \in E^2 \; \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = {}^{t}(\lambda X_1 + \mu X_2)Y = (\lambda\, {}^{t}X_1 + \mu\, {}^{t}X_2)Y = \lambda\, {}^{t}X_1 Y + \mu\, {}^{t}X_2 Y = \lambda\varphi(X_1,Y) + \mu\varphi(X_2,Y)$$
φ est donc linéaire à gauche. La même démonstration se fait à droite et nous amène à φ **bilinéaire**.
$\forall X \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, \forall Y \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in E,\; \varphi(X,Y) = {}^{t}XY = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^{t}YX = \varphi(Y,X)$ donc φ **symétrique**
$\forall X \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in E,\; \varphi(X,X) = \sum_{i=1}^n {x_i}^2.\; \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \geq 0$ donc φ **positive**
$\sum_{i=1}^n {x_i}^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \; x_i = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc φ **définie**

Exemple

Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
φ définie par $\forall (X,Y) \in E^2 \; \varphi(X,Y) = tr({}^{t}XY)$ est un produit scalaire.
φ est appelé produit scalaire **canonique** sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Preuve

Remarquons que si $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors ${}^{t}XY \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et prendre la trace de cette matrice est possible.
$\forall (X_1, X_2, Y) \in E^2 \; \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \; \varphi(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = tr[{}^{t}(\lambda X_1 + \mu X_2)Y] = tr[(\lambda\, {}^{t}X_1 + \mu\, {}^{t}X_2)Y] =$
$tr[\lambda\, {}^{t}X_1 Y + \mu\, {}^{t}X_2 Y] = \lambda tr[{}^{t}X_1 Y] + \mu tr[{}^{t}X_1 Y] = \lambda\, \varphi(X_1,Y) + \mu\varphi(X_2,Y)$
φ est donc linéaire à gauche. La même démonstration se fait à droite et nous amène à φ **bilinéaire**.

$\forall (A,B) \in E^2, A \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \; et \; B \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix},$
$\varphi(A,B) = {}^{t}AB = C \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix}, \varphi(B,A) = {}^{t}BA = D \begin{pmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n,1} & \dots & d_{n,n} \end{pmatrix}$
Avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j} \Rightarrow tr(C) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i}$ et $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,i} \Rightarrow tr(D) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,i}$

Il vient $tr(C) = tr(D) \Rightarrow \varphi(A,B) = \varphi(B,A) \Rightarrow \varphi$ **symétrique**

$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n {a_{k,i}}^2$; Donc $\varphi(A,A) \geq 0 \Rightarrow \varphi$ **positive**

$\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \forall k \in [\![1,n]\!] \; a_{k,i} = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} \Rightarrow \varphi$ **définie**

Définition

- Un $\mathbb{R}$ −ev muni d'un produit scalaire est appelé espace **préhilbertien** réel
- Un espace préhilbertien réel est appelé espace **euclidien**.