Produit scalaire. Bases

Propriété	Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E Alors les coordonnées de x vecteur quelconque de E sont les $(e_i\|x)_{1\leq i\leq n}$
Preuve	
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ nous avons $(e_j\|x) = \left(e_j \middle\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = x_j$ pour $1 \leq j \leq n$	
Remarque	En d'autres termes en posant $(e_j{}^*)_{1\leq i\leq n}$ la base duale de $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ Nous avons $\forall x \in E, e_j{}^*(x) = x_j = (e_j\|x)$
Propriété	Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E Soient $X\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs quelconques de E dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. Nous avons $(x \mid y) = {}^tXY$ et $\\|x\\| = \sqrt{{}^tXX}$
Preuve	
$(x \mid y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$ et $\\|x\\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{{}^tXX}$	
Théorème de la base orthonormée incomplète	Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et de dimension n Soit $e_1, \dots e_p$ une famille orthonormale de E avec $p \leq n$ Alors il est possible de compléter $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ en $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ pour que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une base de E
Preuve	
Soit $A = Vect(e_i)_{1\leq i\leq p}$; $E = A \oplus A^{\perp}$ Soit $(e_i)_{p+1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de $A^{\perp}$. Alors $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E	