Norme et produit scalaire

Théorème Inégalité de Cauchy Schwartz

Soit E un $\mathbb{R}$ –ev muni d'un produit scalaire φ

$$\forall (x,y) \in E^2 \; |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$$

Il n'y a égalité que dans le cas où x et y sont colinéaires.

Preuve

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall (x,y) \in E^2 \; \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \varphi(x,x) + \lambda^2\varphi(y,y) + 2\lambda\varphi(x,y) = P(\lambda)$$

  Or nous savons que $\forall (x,y) \in E^2 \; \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$
  P polynôme du second degré en λ possède donc un discriminant négatif puisque toujours positif.
  Il vient $\Delta = 4\,\varphi^2(x,y) - 4\,\varphi(x,x)\,\varphi(y,y) \leq 0 \Rightarrow \varphi^2(x,y) \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y) \Rightarrow \boldsymbol{|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}}$
- Le cas d'égalité entraine la nullité du discriminant et donc l'existence d'un λ_0 tel que $P(\lambda_0) = 0$

Or nous savons que $\varphi(x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y) = 0 \Rightarrow x + \lambda_0 y = 0$ puisque φ définie. Donc x et y sont colinéaires.
Réciproquement si x et y sont colinéaires alors $y = \lambda x$

$$|\varphi(x,y)| = |\varphi(x,\lambda x)| = |\lambda||\varphi(x,x)| = \sqrt{|\varphi(x,x)|}\sqrt{|\lambda|^2|\varphi(x,x)|} = \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$$

Remarque

Il n'est pas indispensable que φ soit un produit scalaire pour que l'inégalité de Cauchy Schwartz : $|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$ fonctionne. Une forme bilinéaire symétrique positive suffit. La démonstration ci-dessus devrait vous en convaincre.

- $\varphi(x,x)$ positive donc $\forall x \in E$, $\|x\|$ est défini et positif.
- $\varphi(x,x)$ définie donc $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|x+y\| = \sqrt{\varphi(x+y,x+y)}$. Or $\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y)$

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$ –ev

On appelle norme sur E toute application $N : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \to N(x) \end{cases}$ vérifiant les propriétés suivantes.

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \; N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x \in E \; N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\forall (x,y) \in E^2 \; N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

On désigne souvent $N(x)$ par $\|x\|$

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$ –ev muni d'un produit scalaire φ

L'application $\begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \to \sqrt{\varphi(x,x)} \end{cases}$ est une norme sur E. On l'appelle norme associée au produit scalaire φ

Preuve

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda|\sqrt{\varphi(x,x)}$
- φ définie donc $\sqrt{\varphi(x,x)} = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\forall (x,y) \in E^2 |\,\varphi(x+y,x+y)| \leq |\varphi(x,x)| + |\varphi(y,y)| + 2|\varphi(x,y)| \leq \left(\sqrt{\varphi(x,x)}\right)^2 + \left(\sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2 + 2\sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$
  $\left(\sqrt{\varphi(x+y,x+y)}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$

Remarque

- L'inégalité de Cauchy Schwartz peut donc s'écrire $|(x|y)| \leq \|y\|\|x\|$
  Nous retrouvons une inégalité bien connue du produit scalaire dans le plan. Avec $(x|y) = \|y\|\|x\|\cos\,(\widehat{x,y})$
- Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

Propriété

De la même manière que dans le plan il est possible de remonter au produit scalaire à partir de la norme. Ce sont les égalités dites de polarisation.

$$(x|y) = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

Preuve

$$\|x+y\|^2 = \varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \Rightarrow (x|y) = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

$$\|x-y\|^2 = \varphi(x-y,x-y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) - 2\varphi(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y) \Rightarrow \|x-y\|^2 - \|x+y\|^2 = 4(x|y) \Rightarrow$$

$$(x|y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

Propriété

$$\forall (x,y) \in E^2 \; |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

L'inégalité de droite n'étant une égalité que dans les cas où x et y sont colinéaires de même sens

Preuve

L'inégalité de droite $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ a déjà été montrée. Il nous reste à montrer le cas d'égalité.

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

Or $\|x+y\|^2 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + 2\varphi(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x,y)$

Donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \Rightarrow \ \varphi(x,y) = \|x\|\|y\| \Rightarrow x$ et y colinéaires (Inégalité de Cauchy Scwartz)

Or si $y = \lambda x$, $\varphi(x,y) = \lambda\, \varphi(x,x)$ donc $\lambda\, \varphi(x,x) = \|x\|\|\lambda x\| \Rightarrow \lambda \geq 0$. La réciproque est évidente.

L'inégalité de gauche se montre ainsi :

$$\forall (x,y) \in \ E^2 \ \|x\| = \|x+y-y\| \leq \|x+y\| + \|-y\| \leq \|x+y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$$

De même $\|y\| = \|x+y-x\| \leq \|x+y\| + \|-x\| \leq \|x+y\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$

Nous avons donc bien :

$$\forall (x,y) \in \ E^2 \ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$$