Produit scalaire. Orthogonalité. Supplémentaires

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$

Définition	Des vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement $(x y) = 0$. On note $x \perp y$
Remarque	Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E
Définition	Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale si et seulement si $\forall (i, j) \in I^2$ avec $i \neq j, x_i x_j = 0$
Définition	Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormale si et seulement si elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont de norme 1.
Exemple	<ul style="list-style-type: none"> Les vecteurs $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire vu au lycée. Les fonctions $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ constituent une famille orthonormée pour le produit scalaire $(f g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définie dans $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$

Preuve

Si le premier point ne présente pas de difficulté, le deuxième point mérite d'être approfondi.
 $(f_n | f_n) = \int_0^{2\pi} f_n^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt$.
 Or nous savons que $1 + \cos 2x = 1 + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos^2(nt) = \frac{1 + \cos 2nt}{2}$
 $(f_n | f_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2nt}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2nt}{2} dt = 1 + [\frac{1}{4n} \sin 2nt]_0^{2\pi} = 1$. Les vecteurs sont donc tous bien unitaires.
 Pour $m \neq n, (f_n | f_m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt dt$.
 Or nous savons que $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$. Il vient $\cos nt \cos mt = \frac{1}{2} [\cos(m + n)t + \cos(m - n)t]$
 $(f_n | f_m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(m + n)t + \cos(m - n)t] dt = \frac{1}{\pi} [\frac{\sin(m+n)t}{m+n} + \frac{\sin(m-n)t}{m-n}]_0^{2\pi} = 0$. La famille est bien orthogonale.

Propriété	Une famille orthogonale $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs non nuls est libre
------------------	--

Preuve

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls.
 Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de réels.
 $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall j \in I, (x_j | \sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \lambda_j (x_j | x_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$ puisque x_j est non nul. La famille est bien libre.

Définition	Soit X une partie de E . On note $X^\perp = \{x \in E \text{ tel que } \forall y \in X, x y = 0\}$ On appelle $X^\perp$ l'orthogonal de X .
-------------------	--

Propriété	$X^\perp$ est un <i>sev</i>
------------------	-----------------------------

Preuve

$X^\perp$ est non vide puisque contient le vecteur nul.
 $\forall x \in X^\perp, \forall y \in X^\perp, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in X, (x + \lambda y | z) = (x | z) + \lambda(y | z) = 0$ donc $x + \lambda y \in X^\perp$

Propriété	Si X est un <i>sev</i> alors X et $X^\perp$ sont en somme directe.
------------------	--

Preuve

$$x \in X \cap X^\perp \Rightarrow x | x = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

Remarque	Nous avons $X \cap X^\perp = \{0_E\}$ mais nous n'avons pas forcément $E = X \oplus X^\perp$. Nous verrons plus loin dans le chapitre sur les bases orthonormales dans quel cas nous pouvons affirmer que les deux <i>sev</i> sont en somme directe.
-----------------	---

Propriété	Si X est un <i>sev</i> de dimension finie alors $E = X \oplus X^\perp$
------------------	---

Propriété	Soit F une partie de E . Soit $X = \text{vect}(F)$. Alors $X^\perp = F^\perp$
------------------	---

Preuve

Soit $x \in X^\perp$. $F \subset X$ donc $x \in F^\perp$ il vient $X^\perp \subset F^\perp$
 Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in X$. $y = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$ avec $\forall i \in I, f_i \in F$
 Donc $x | y = x | \sum_{i \in I} \lambda_i f_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (x | f_i) = 0$ donc $x \in X^\perp, F^\perp \subset X^\perp$
 Nous avons bien $X^\perp = F^\perp$

Propriété	Soit X une partie de E . $X \subset (X^\perp)^\perp$
Preuve	
Soit $y \in X^\perp$ et $x \in X$. Nous avons $x y = 0$ donc $x \in (X^\perp)^\perp$. $X \subset (X^\perp)^\perp$	
Remarque	Nous n'avons pas en général $X = (X^\perp)^\perp$
Théorème (de Pythagore)	Soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille orthogonale. $\left\ \sum_{i=1}^n x_i \right\ ^2 = \sum_{i=1}^n \ x_i\ ^2$
Preuve	
$\left\ \sum_{i=1}^n x_i \right\ ^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n (x_i \mid x_i) = \sum_{i=1}^n \ x_i\ ^2$	
Théorème.	C'est le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . Soit $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille libre de vecteurs de E Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ Pour la construire de proche en proche il suffit de poser : $e_k = \pm \frac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \mid u_k) e_i}{\ u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \mid u_k) e_i\ }$
Preuve	
La preuve se fait par récurrence sur k . Soit $P(k)$: Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ telle que $\forall m \in \llbracket 1, k \rrbracket \text{ vect}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_m)$ <u>Initialisation</u> : $k = 1$ Il suffit de poser $e_1 = \frac{u_1}{\ u_1\ }$; $\text{vect}(e_1) = \text{vect}(u_1)$ et e_1 est unitaire. Nous pouvons continuer avec $k = 2$ pour nous fixer les idées. Posons $e_1 = \frac{u_1}{\ u_1\ }$ et $\hat{e}_2 = u_2 - (u_2 \mid e_1) e_1$; $\hat{e}_2 \mid e_1 = (u_2 \mid e_1) - (u_2 \mid e_1) = 0$ donc $\hat{e}_2 \perp e_1$ $\hat{e}_2$ peut-il être nul ? si oui cela signifie que u_2 colinéaire à e_1 donc à u_1 . Or u_2 et u_1 sont libres, donc $\hat{e}_2 \neq 0$ Nous pouvons le normer. Posons $e_2 = \frac{u_2 - (u_2 \mid e_1) e_1}{\ u_2 - (u_2 \mid e_1) e_1\ }$; La famille e_1, e_2 est donc une famille orthonormale. $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_1, u_2) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ Nous avons donc bien (e_1, e_2) orthonormale, $\text{vect}(e_1) = \text{vect}(u_1)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ <u>Hérédité</u> : Supposons que $P(k)$ soit vraie et montrons $P(k+1)$ Nous disposons de $(e_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ telle que $\forall m \in \llbracket 1, k \rrbracket \text{ vect}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_m)$ Posons $\widehat{e}_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_i \mid u_{k+1}) e_i$ Nous avons $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket (\widehat{e}_{k+1} \mid e_j) = (u_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_i \mid u_{k+1}) e_i \mid e_j) = u_{k+1} \mid e_j - e_j \mid u_{k+1} = 0$ Donc la famille $(e_1, e_2, \dots, e_k, \widehat{e}_{k+1})$ est orthogonale. $\widehat{e}_{k+1}$ peut-il être nul. Si oui cela signifie que $u_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ or $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ Donc cela signifierait aussi que $u_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ ce qui est impossible puisque la famille $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre. Donc $\widehat{e}_{k+1} \neq 0$. Nous pouvons le normer. Posons $e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_i \mid u_{k+1}) e_i}{\ u_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_i \mid u_{k+1}) e_i\ }$ La famille $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1})$ est orthonormale. D'après la construction de e_{k+1} nous avons $\begin{aligned} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}) &= \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) + \text{Vect}(u_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) + \text{Vect}(u_{k+1}) \\ &= \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \end{aligned}$ La famille $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1})$ remplit donc totalement l'objectif. <u>Conclusion</u> : Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$	
Théorème	Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ E possède une base orthonormée.
Preuve	
E étant de dimension finie, il admet une base. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base on obtient une autre base orthonormée.	
Théorème	Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ Soit X un <i>sev</i> de E de dimension finie. Alors $X^\perp$ est un supplémentaire de X dans E il est unique. De plus $X^{\perp\perp} = X$ Si E est de dimension finie aussi alors $\dim(X^\perp) = \dim(E) - \dim(X)$
Preuve	

Nous savons déjà que $X^\perp$ et X sont en somme directe.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base orthonormée de X

$$\forall x \in E, x = x_1 + x_2$$

Avec $x_1 = x - \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$ et $x_2 = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$

Remarquons que $x_2 \in X$ et que $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket (e_j | x_1) = (e_j | x - \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i) = (e_j | x) - (e_j | x) = 0$
 x_1 étant orthogonal à tout vecteur de base de X nous en déduisons que $x_1 \in X^\perp$

Nous avons donc montré que $E = X + X^\perp$ ce qui avec la somme directe nous suffit pour dire que $E = X \oplus X^\perp$

Montrons l'unicité par l'absurde.

Soit X' un autre supplémentaire de X orthogonal à X . $X' \perp X \Rightarrow X' \subset X^\perp$

De plus soit $x \in X^\perp$ nous avons $E = X \oplus X'$ donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in X$ et $x_2 \in X'$

$$(x_1 | x_1) = (x_1 | x - x_2) = (x_1 | x) - (x_1 | x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = x_2 \Rightarrow x \in X' \Rightarrow X^\perp \subset X'$$

Nous avons donc bien $X' = X^\perp$

De plus nous savons déjà que $X \subset X^{\perp\perp}$

Soit $x \in X^{\perp\perp}$. $E = X \oplus X^\perp$ donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in X$ et $x_2 \in X^\perp$

$$(x_2 | x_2) = (x_2 | x - x_1) = (x_2 | x) - (x_2 | x_1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x = x_1 \Rightarrow x \in X \Rightarrow X^{\perp\perp} \subset X$$

Nous avons donc bien $X^{\perp\perp} = X$

Si E est de dimension finie alors l'égalité $E = X \oplus X^\perp$ se traduit pas $\dim(E) = \dim(X) + \dim(X^\perp)$