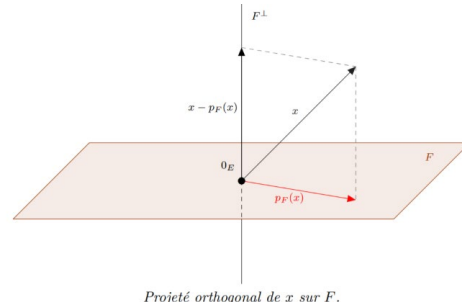


Produit scalaire. Projeté orthogonal. Distance.
Définition

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.
 Soit F un *sev* de E de dimension finie.
 Soit x un vecteur de E .
 On appelle projeté orthogonal de x sur F que l'on note $p(x)$ la composante de x sur F dans la décomposition $E = F \oplus F^\perp$


Théorème

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.
 Soit F un *sev* de E de dimension finie de base $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$
 Soit x un vecteur de E .
 Le projeté orthogonal de x sur F que l'on note $p(x)$ est égal à $\sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i$

Preuve

Soit $x \in E$. Nous avons $x = \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i + x - \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i$
 Nous pouvons remarquer que $\sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i \in F$ et que $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket (f_j | x - \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i) = (f_j | x) - (f_j | x) = 0$
 Donc $x - \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i \in F^\perp$. Nous avons donc bien $p(x) = \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i$.

Remarque

Nous remarquons au passage que si $p(x) = \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i$ est le projeté orthogonal sur F alors $x - p(x)$ est orthogonal à F .

Théorème

Plaçons nous dans un cas particulier.
 Soit E un espace euclidien.
 Soit H un hyperplan de E de dimension finie.
 Soit n un vecteur de $H^\perp$ de norme 1 dit normal à H
 Le projeté orthogonal de x sur H que l'on note $p(x)$ est égal à $x - (x | n)n$

Preuve

Dans le cas d'un hyperplan il semblerait donc que pour projeter x sur H il soit plus rapide de le projeter d'abord sur $H^\perp$
 Remarquons d'abord que $\dim(H) = n - 1$ donc $\dim(H^\perp) = 1$
 $H^\perp$ est donc une droite vectorielle portée par n'importe quel vecteur non nul. Soit n un de ces vecteurs que l'on aura préalablement normé.
 Nous avons $x = x - (x | n)n + (x | n)n$. $(x | n)n \in H^\perp$ et $(x - (x | n)n | n) = (x | n) - (x | n) = 0$ donc $x - (x | n)n \in H^{\perp\perp}$ soit H
 Nous avons bien $p(x) = x - (x | n)n$

Définition

Soit E un espace vectoriel préhilbertien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.
 Soit F un *sev* de E
 Soit x un vecteur de E
 On appelle distance de x à F et on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$

Théorème

Soit E un espace vectoriel préhilbertien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.
 Soit F un *sev* de E de dimension finie.
 Soit x un vecteur de E et soit $p(x)$ son projeté orthogonal sur F
 Alors $d(x, F) = \|x - p(x)\|$

Preuve

Remarquons que $\forall y \in F$ nous avons $x - y = x - p(x) + p(x) - y$
 Nous avons déjà vu que $x - p(x) \in F^\perp$ et nous notons que $p(x) - y \in F$
 Nous en déduisons d'après le théorème de Pythagore que

$$\forall y \in F \|x - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$$

 Il vient $\forall y \in F \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$ Donc $\inf_{y \in F} \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$
 Mais cette borne inf est atteinte pour $y = p(x)$. Nous avons donc bien

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|$$

Théorème

Revenons dans le cas particulier précédent.
 Soit E un espace euclidien.
 Soit H un hyperplan de E de dimension finie.
 Soit n un vecteur de $H^\perp$ de norme 1 dit normal à H

$$d(x, H) = \|x - (x | n)n\|$$

Preuve

C'est la simple application du théorème précédent dans le cas où $p(x) = (x | n)n$