Propriété Intégrale

Propriété

Soit f une continue par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

Preuve

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
Nous avons $\forall t \in [a;b]$ $\ |f(t)| \leq |f(t)-\varphi_n(t)| + |\varphi_n(t)| \Rightarrow |f(t)| - |\varphi_n(t)| \leq |f(t)-\varphi_n(t)|$
De même $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(t)-f(t)| + |f(t)| \Rightarrow |\varphi_n(t)| - |f(t)| \leq |\varphi_n(t)-f(t)|$
Nous avons donc $\big||\varphi_n(t)| - |f(t)|\big| \leq |\varphi_n(t)-f(t)| \Rightarrow \||\varphi_n(t)| - |f(t)|\|_\infty \leq \|\varphi_n(t)-f(t)\|_\infty$ (*)
Donc si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$ nous en déduisons que $(|\varphi_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers$|f|$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b |\varphi_n(t)|\ dt = \int_a^b |f(t)|$

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(t)|dt$$

Faisons tendre cette inégalité vers $+\infty$, il vient $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \Rightarrow \|\varphi_n\|_\infty - \|f\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty$$
$$\|f\|_\infty \leq \|f - \varphi_n\|_\infty + \|\varphi_n\|_\infty \Rightarrow \|f\|_\infty - \|\varphi_n\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty$$

Il vient $|\|\varphi_n\|_\infty - \|f\|_\infty| \leq \|\varphi_n - f\|_\infty$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_\infty = \|f\|_\infty$

De plus nous savons que $\int_a^b |\varphi_n(t)|dt \leq (b-a)\|\varphi_n\|_\infty$
Faisons tendre cette inégalité vers $+\infty$, il vient $\int_a^b |f(t)|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Soient λ et μ deux complexes.
L'intégrale est une fonction linéaire. Autrement dit :

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

Preuve

Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonction convergeant uniformément vers f et g respectivement.

Nous avons $\int_a^b [\lambda\varphi_n(t) + \mu\psi_n(t)]dt = \lambda \int_a^b \varphi_n\,dt + \mu \int_a^b \psi_n\,dt\ (*)$

Remarquons que :

$$\|\lambda\varphi_n + \mu\psi_n - \lambda f - \mu g\|_\infty \leq \lambda\|f - \varphi_n\|_\infty + \mu\|g - \psi_n\|_\infty$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|\psi_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|\lambda\varphi_n + \mu\psi_n - \lambda f - \mu g\|_\infty = 0 \Rightarrow (\lambda\varphi_n + \mu\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.
Faisons tendre $(*)$ vers $+\infty$ il vient $\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$

Remarque

La propriété précédente permet d'écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left[Re\big(f(t)\big) + iIm\big(f(t)\big)\right]dt = \int_a^b Re(f(t))\,dt + i\int_a^b Im(f(t))\,dt$$

Il vient : l'intégrale d'une fonction réelle est réelle.

Propriété (Relation de Chasles)

Soit f une continue par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Soit $c \in]a;b[$

Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Preuve

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
$\sigma = (x_0, x_1, \dots x_p)$ une subdivision adaptée à $\varphi_n. x_0 = a$ et $x_p = b$
Nous avons vu que ajouter un nombre fini de points à σ aboutit à une autre subdivision elle aussi adaptée à f
Soit $\sigma' = \sigma \cup \{c\} = (y_0, y_1, \dots y_{p'})$ avec $y_0 = a$; $y_{p'} = b$ et $y_k = c$ $(1 \leq k \leq p' - 1)$

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt = \sum_{j=0}^{p'-1} (y_{j+1} - y_j)\, \varphi_n\left(\frac{y_{j+1} + y_j}{2}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (y_{j+1} - y_j)\, \varphi_n\left(\frac{y_{j+1} + y_j}{2}\right) + \sum_{j=k}^{p'-1} (y_{j+1} - y_j)\, \varphi_n\left(\frac{y_{j+1} + y_j}{2}\right)$$

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^c \varphi_n(t)dt + \int_c^b \varphi_n(t)dt \ (**)$$

Remarquons maintenant que $sup_{x\in[a,c]}|\varphi_n - f| \leq sup_{x\in[a,b]}|\varphi_n - f| \Rightarrow \|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,c]} \leq \|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]}$
Nous en déduisons que si φ_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$ elle fait de même sur $[a,c]$.
Nous avons donc en faisant tendre l'expression $(**)$ vers $+\infty$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
On suppose que f et g ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.
Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$

Preuve

La fonction $f - g$ est nulle sauf en un nombre fini de points. C'est donc une fonction en escalier. D'après un théorème vu précédemment sur les fonctions en escalier. On a $\int_a^b f(t) - g(t)dt = 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$

Propriété

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Nous admettrons pour l'instant que :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Propriété

Soit f une fonction continues par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
On suppose f positive sur $[a,b]$
Alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Preuve

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $\forall t \in [a\,;b]\ \psi_n(t) = \max(0\,;\varphi_n(t))$
En un mot là où φ_n est strictement négative, ψ_n est nulle sinon elle est égale à φ_n.

Par construction ψ_n est aussi une fonction en escalier. De plus, f étant positive sur $[a\,;b]$ nous avons

$$\|\psi_n - f\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty$$

Il y a donc aussi convergence uniforme de ψ_n vers f sur $[a,b]$.

Nous avons donc $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$
$\forall t \in [a\,;b]\ \psi_n(t) \geq 0$ donc par définition $\int_a^b \psi_n(t)dt \geq 0$ et par conséquent $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\forall t \in [a\,;b]\ f(t) \leq g(t)$
Alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Preuve

$\forall t \in [a\,;b]\ f(t) \leq g(t) \Rightarrow \ \forall t \in [a\,;b]\ g(t) - f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(t) - f(t)dt \geq 0$ (propriété précédente)

$$\int_a^b g(t) - f(t)dt \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Propriété

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
On suppose f positive sur $[a,b]$ et $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$ avec f continue en c.
Alors $\int_a^b f(t)dt > 0$

Preuve

1er cas : $c \in]a, b[$
f continue en c donc $\exists \eta > 0$ tel que $\forall t \in]c-\eta; c+\eta[\ f(t) \geq \frac{f(c)}{2}$
Soit φ la fonction en escalier définie par $\forall t \in]c-\eta; c+\eta[\ \varphi(t) = \frac{f(c)}{2}$ et $\forall t \in [a;b] -]c-\eta; c+\eta[\ \varphi(t) = 0$
f étant positive sur $[a;b]$ nous avons $\forall t \in [a;b]\ f(t) \geq \varphi(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b \varphi(t)dt$ (propriété précédente)
Or $\int_a^b \varphi(t)dt = 2\eta \frac{f(c)}{2} = \eta f(c)$ donc $\int_a^b \varphi(t)dt > 0$. Nous avons bien $\int_a^b f(t)dt > 0$

2eme cas : $c = a$
f continue en a donc $\exists \eta > 0$ tel que $\forall t \in [a; a+\eta[\ f(t) \geq \frac{f(c)}{2}$
Soit φ la fonction en escalier définie par $\forall t \in [a; a+\eta[\ \varphi(t) = \frac{f(c)}{2}$ et $\forall t \in [a;b] - [a; a+\eta[\ \ \varphi(t) = 0$
f étant positive sur $[a;b]$ nous avons $\forall t \in [a;b]\ f(t) \geq \varphi(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b \varphi(t)dt$ (propriété précédente)
Or $\int_a^b \varphi(t)dt = \eta \frac{f(c)}{2} = \frac{\eta f(c)}{2}$ donc $\int_a^b \varphi(t)dt > 0$. Nous avons bien $\int_a^b f(t)dt > 0$
3eme cas : $c = b$; c'est le cas symétrique du deuxième.

Propriété	Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant et continue sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$

Preuve

Par l'absurde : On suppose $\exists c \in [a;b]\ tel\ que\ f(c) \neq 0$
Si $f(c) > 0$ alors f étant positive et continue nous avons vu que $\int_a^b f(t)dt > 0$ ce qui est impossible puisque $\int_a^b f(t)dt = 0$
Si $f(c) < 0$ alors f étant négative et continue nous avons $-f$ positive et continue et $-f(c) > 0$
D'après la propriété précédente cela devrait donc entrainer $\int_a^b -f(t)dt > 0 \Rightarrow -\int_a^b f(t)dt > 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt < 0$
Or là encore c'est impossible puisque $\int_a^b f(t)dt = 0$. Nous ne pouvons donc pas avoir $f(c) \neq 0$

f est bien nulle sur $[a, b]$