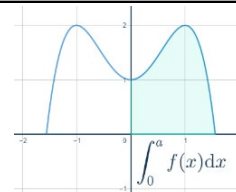


Propriété Intégrale
Propriété

Soit a un réel strictement positif
 Soit f une continue par morceaux définie sur $[-a, a]$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
 Si f paire alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$


Preuve

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[0, a]$.
 Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $\forall t \in [0; a] \psi_n(t) = \varphi_n(t)$ et $\forall t \in [-a; 0] \psi_n(t) = \varphi_n(-t)$
 Nous avons donc construit ψ_n pour que ψ_n soit paire sur $[-a, a]$

f et ψ_n étant paires nous avons $\|\psi_n - f\|_{\infty, [-a, a]} = \|\psi_n - f\|_{\infty, [0, a]} = \|\varphi_n - f\|_{\infty, [0, a]}$
 Donc il y a convergence uniforme de ψ_n vers f sur $[-a, a]$

$$\text{Nous avons donc } \int_{-a}^a f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \psi_n(t) dt$$

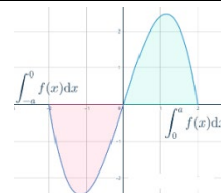
Par construction et par définition, ψ_n étant une fonction en escalier, paire nous avons $\int_{-a}^a \psi_n(t) dt = 2 \int_0^a \psi_n(t) dt$

$$\text{Nous avons donc } \int_{-a}^a f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a \psi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a \varphi_n(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Propriété

Soit a un réel strictement positif
 Soit f une continue par morceaux définie sur $[-a, a]$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
 Si f impaire alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$


Preuve

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier définie sur $[0, a]$ et convergeant uniformément vers f sur $[0, a]$.
 Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[-a, a]$ par $\forall t \in [0; a] \psi_n(t) = \varphi_n(t)$ et $\forall t \in [-a; 0] \psi_n(t) = -\varphi_n(-t)$
 Nous avons donc construit ψ_n pour que ψ_n soit impaire sur $[-a, a]$

f et ψ_n étant impaires nous avons $\|\psi_n - f\|_{\infty, [-a, a]} = \|\psi_n - f\|_{\infty, [0, a]} = \|\varphi_n - f\|_{\infty, [0, a]}$
 Donc il y a convergence uniforme de ψ_n vers f sur $[-a, a]$

$$\text{Nous avons donc } \int_{-a}^a f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \psi_n(t) dt$$

Par construction et par définition, ψ_n étant une fonction en escalier, impaire nous avons $\int_{-a}^a \psi_n(t) dt = 0$

$$\text{Nous avons donc } \int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

Propriété

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
 On suppose f périodique de période T
 Alors $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Preuve

Admise pour l'instant