

Convergence absolue

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes complexes.

- On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument ssi la série à termes réels $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.
- On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est semi convergente si elle converge sans converger absolument.

Exemples

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument. Par contre la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes complexes.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors elle converge.

Preuve

- Première étape : On suppose $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes réels.

$\forall n \geq 0 \quad 0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$ donc $\sum_{k=0}^n u_k + |u_k| \leq \sum_{k=0}^n 2|u_k| \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

La série $\sum_{n \geq 0} u_n + |u_n|$ de terme général positif est majorée donc convergente.

$$u_n = u_n + |u_n| - |u_n| \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} u_n + |u_n| - \sum_{n \geq 0} |u_n|$$

Nous en déduisons la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$

- Deuxième étape : On suppose $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes réels.

$\forall n \geq 0 \quad |Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$; Les séries réelles $\sum_{n \geq 0} |Re(u_n)|$ et $\sum_{n \geq 0} |Im(u_n)|$ sont à termes positifs et majorées par $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ nous en déduisons leur convergence.

$\sum_{n \geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} Im(u_n)$ convergent donc absolument. Or d'après la première étape c'est suffisant pour dire qu'elles convergent. Nous en déduisons la convergence de $\sum_{n \geq 0} Re(u_n) + iIm(u_n)$ soit $\sum_{n \geq 0} u_n$

Exemple

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ citée plus haut et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{i n \pi}{3}}}{n^3}$ convergent absolument. Nous en déduisons qu'elles convergent.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes complexes.

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes réels positifs à partir d'un certain rang.

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve

$u_n = O(v_n)$ donc $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq K v_n$ avec $K \in \mathbb{R}^+$

$\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est donc une série à termes réels positifs majorée par $\sum_{n \geq n_0} K v_n$.

Nous en déduisons donc la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} u_n$ qui entraîne sa convergence.