Critère de Riemann, Séries à termes positifs.

Théorème

Séries de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. Ce critère est appelé critère de Riemann.

Preuve

Remarquons déjà que lorsque $\alpha \leq 0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \neq 0 \Rightarrow$ divergence grossière de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$

Nous avons aussi vu que $\alpha = 1$ entraine la divergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

Envisageons donc le cas $\alpha \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

Nous avons déjà vu sur la preuve de la convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$; qu'il était possible de lier l'étude de la converge de $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ avec celui de $\int_1^n f(t)\,dt$ lorsque f est continue et montone.

Ici nous nous intéresserons à $f:\begin{Bmatrix}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}\\ x\to\frac{1}{x^\alpha}\end{Bmatrix}$;

La décroissance de cette fonction nous donne :

$$\int_1^2 f(t)dt \geq f(2) \geq \int_2^3 f(t)dt \text{ (voire shéma joint avec } \alpha = 2)$$

$$\dots$$

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt$$

En additionnant terme à terme ces inégalités il vient :

$$\int_1^n f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_2^{n+1} f(t)dt$$

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \geq \int_2^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dt$$

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \geq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1}$$

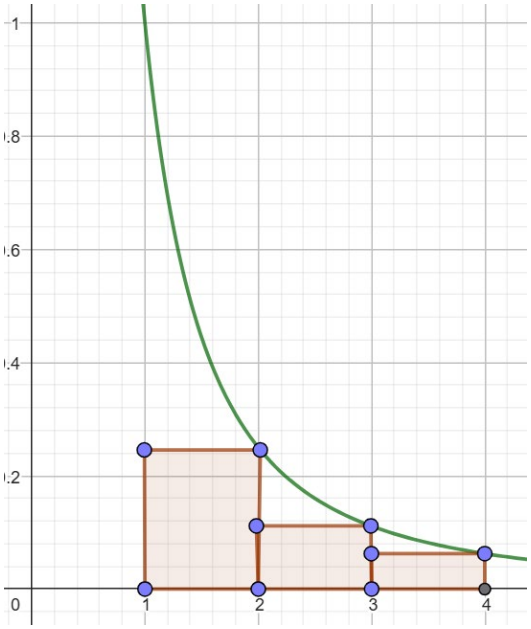
$$\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}-1\right] \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right]$$

- $\alpha \in]0;1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right] = +\infty$

Donc en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$; $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc minorée par une suite tendant vers $+\infty$. On en déduit sa divergence

- $\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}-1\right] = \frac{1}{\alpha-1}$ Donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

$(S_n)_{n\geq 1}$ étant croissante ($S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$) nous en déduisons sa convergence.



Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes réels positifs.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ssi $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.

Preuve

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ et $u_{n+1} \geq 0$ donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Une suite croissante converge ssi elle est majorée.

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0
Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Preuve

Il suffit de se replacer dans le monde des suites.
Soient $(U_n)_{n\geq n_0}$ et $(V_n)_{n\geq n_0}$ deux suites définies par $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$
$\forall n \geq n_0\ 0 \leq u_n \leq v_n$ donc $0 \leq U_n \leq V_n$;
$\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$ diverge
$\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k$; $(U_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante (termes positifs) et majorée converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exemple

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites définies par $u_n = \frac{1}{((-1)^n\cos n+3n^2)}$ et $v_n = \frac{e^{(-1)^n}}{\sqrt{n}}$
$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge

Preuve

$\forall n \geq 1\ 0 \leq \frac{1}{((-1)^n\cos n+3n^2)} \leq \frac{1}{(3n^2-1)} \leq \frac{1}{(3n^2-n^2)} \leq \frac{1}{2n^2}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge aussi

$\forall n \geq 1\ 0 \leq \frac{e^{-1}}{\sqrt{n}} \leq \frac{e^{(-1)^n}}{\sqrt{n}}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-1}}{\sqrt{n}}$ diverge (critère de Riemann) donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge aussi

Théorème	Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ en l'infini alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature
Preuve	
$u_n \sim v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Rightarrow \exists n_0\ tq\ \forall n \geq n_0\ \frac{u_n}{v_n} \leq 2 \Rightarrow \forall n \geq n_0\ 0 \leq u_n \leq 2v_n$ L'application du théorème précédent aux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(2v_n)_{n\geq 0}$ nous donne le résultat final.	
Exemple	Reprenons l'exemple précédent avec $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{((-1)^n \cos n + 3n^2)}$; $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$ $u_n = \frac{1}{3n^2} * \frac{1}{1+\frac{(-1)^n \cos n}{3n^2}} \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{3n^2}\ (en +\infty)$ donc la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^2}$ (critère de Riemann) entraine la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$