

Intégrale de Wallis

Définition

Soit $(I_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$
 Cette suite est appelée suite des intégrales de Wallis

Théorème

Formule de stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} * n^n$$

Preuve

L'étude des intégrales de Wallis va nous apporter une preuve de ce théorème.

Remarquons déjà que grâce à une IPP :

$$\forall n \geq 2 \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (\sin t)^{n-1} dt = [-\cos t * (\sin t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t (n-1)(\sin t)^{n-2} \cos t dt$$

$$\Rightarrow I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} \cos^2 t dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} (1 - \sin^2 t) dt = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} & I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \\ I_{2n-2} &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} & I_{2n-1} &= \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \\ &\dots & &\dots \\ I_2 &= \frac{1}{2} I_0 & I_3 &= \frac{2}{1} I_1 \end{aligned}$$

En multipliant terme à termes ces égalités composées de termes non nuls nous obtenons après simplification

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} * \frac{2n-3}{2n-2} * \dots * \frac{1}{2} I_0 \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} * \frac{2n-2}{2n-1} * \dots * \frac{2}{1} I_1$$

En multipliant numérateur et dénominateur de I_{2n} par $2n * (2n-2) * \dots * 2$ nous obtenons :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{[2n*(2n-2)*\dots*2]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} * \frac{\pi}{2} \quad \text{car un rapide calcul nous donne } I_0 = \frac{\pi}{2}$$

En multipliant numérateur et dénominateur de I_{2n+1} par $2n * (2n-2) * \dots * 2$ nous obtenons :

$$I_{2n+1} = \frac{[2n*(2n-2)*\dots*2]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} \quad \text{car un rapide calcul nous donne } I_1 = 1$$

$$\text{Il vient } I_{2n+1} * I_{2n} = \frac{\pi}{2} * \left(\frac{1}{2n+1} \right) \Rightarrow I_{2n+1} * I_{2n} \sim \frac{\pi}{4n} (*)$$

La fonction $t \rightarrow \sin t$ étant positive et comprise entre 0 et 1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ nous avons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-1} dt$$

$$\Rightarrow I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \quad \text{les termes étant tous } > 0$$

$$\text{Or } \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad \text{il vient } 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 \Rightarrow I_{2n} \sim I_{2n+1} \quad . \text{ Il nous vient donc dans } (*)$$

$$I_{2n}^2 \sim \frac{\pi}{4n} \Rightarrow I_{2n} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

A ce stade nous avons besoin d'introduire deux nouvelles suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

$$v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left[\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \right] = \ln \left[e^{-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right] = \ln e^{-1} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) = -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{12n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Nous avons donc $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$; v_n étant positif à partir d'un certain rang et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{12n^2}$ étant convergente, nous en déduisons la convergence de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

Or $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$; Nous en déduisons que la convergence de $\sum_{n \geq 1} v_n$ nous donne aussi celle de $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ (termes emboîtés) et donc celle de $(u_n)_{n \geq 1}$ par composition par la fonction exponentielle.

Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$ (la fonction exponentielle ne s'annule pas)

Il vient $\frac{n^n e^{-n\sqrt{n}}}{n!} \sim l \Rightarrow \frac{n!}{(n^n e^{-n\sqrt{n}})} \sim \frac{1}{l} \Rightarrow n! \sim \frac{(n^n e^{-n\sqrt{n}})}{l}$ Nous avons donc trouvé un équivalent de $n!$ dépendant d'une constante.

Revenons à $I_{2n} = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} * \frac{\pi}{2}$ En utilisant cet équivalent de $n!$ nous avons :

$$I_{2n} \sim \frac{((2n)^{2n} e^{-2n\sqrt{2n}})}{l} * \frac{\pi}{2} * \frac{l^2}{2^{2n} * (n)^{2n} e^{-2n} * n} \sim \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{n}} * l$$

Mais nous avons vu que $I_{2n} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ nous avons donc $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{n}} * l \Rightarrow l = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

Revenons à l'équivalent de $n!$ que nous avons trouvé : $n! \sim \frac{(n^n e^{-n\sqrt{n}})}{l}$

Nous aboutissons à la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} * n^n e^{-n}$