Dérivation dans $\mathbb{R}^2$	
Si dans $\mathbb{R}$ la dérivation d'une fonction ne peut se faire que dans une direction (celle des x ...) dans $\mathbb{R}^2$ la dérivation d'une fonction se fait le long d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$	
Définition	Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, v un vecteur de $\mathbb{R}^2$, a un point de U et f une fonction $U \to \mathbb{R}$ On dit que la fonction f est dérivable en a selon la direction v lorsque la fonction : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \end{cases}$ admet une limite en 0. Lorsque c'est le cas on note cette limite $D_v f(a)$
Remarque	Une fonction n'admet donc pas une seule dérivée mais une multitude selon les directions retenues. En pratique deux directions sont privilégiées aux autres.
Définition	Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un point de U et f une fonction $U \to \mathbb{R}$. Soient $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ les deux vecteurs constituant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $D_{\overrightarrow{e_1}}f(a)$ s'il existe est appelé première dérivée partielle de f en a et est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ $D_{\overrightarrow{e_2}}f(a)$ s'il existe est appelé deuxième dérivée partielle de f en a et est notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$
Exemple	Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to e^{x^2-7y} \end{cases}$. La fonction f est dérivable sur n'importe quelle direction de $\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-7y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -7e^{x^2-7y}$
Propriété	Les propriétés de la dérivation sur $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{R}^2$. A savoir : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Soient f et g deux fonctions définies sur U à valeur dans $\mathbb{R}$. Soient λ et μ deux réels • Si f et g admettent des dérivées partielles sur U alors toute combinaison linéaire de f et de g, le produit des deux fonctions fg, l'inverse de f : $\frac{1}{f}$ (si f ne s'annule pas) admettent aussi ces dérivées partielles. • $\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f + \mu g)(x,y) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mu \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$; $\frac{\partial}{\partial x}(fg)(x,y) = g(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right)(x,y) = -\frac{1}{f^2(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ Nous avons ici dérivé selon x mais ces propriétés auraient été bien entendu valables si l'on avait dérivé selon y. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \left(\frac{1}{g^2(x,y)}\right) * \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)f(x,y)\right]$
Propriété	De même pour la composition nous retrouvons le même fonctionnement que dans $\mathbb{R}$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I intervalle de $\mathbb{R}$ Soient f une fonction définie sur U à valeur dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur U Soit φ une fonction définie et dérivable sur I avec $I \subset f(U)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi\ o\ f$ admet aussi des dérivées partielles sur U et $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\ o\ f)(x,y) = \varphi'\big(f(x,y)\big) * \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\ o\ f)(x,y) = \varphi'\big(f(x,y)\big) * \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
Exemple	Reprenons $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to e^{x^2-7y} \end{cases}$ et $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \ln(1+x) \end{cases}$; f et φ remplissent toutes les conditions énoncées dans la propriété précédente. Soit $F: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \ln(1+e^{x^2-7y}) \end{cases}$ $F(x,y) = \varphi\ o\ f\ (x,y)$; D'après la propriété précédente F admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles dans toutes les directions et : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\ln(1+e^{x^2-7y})} * 2xe^{x^2-7y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\ln(1+e^{x^2-7y})} * -7e^{x^2-7y}$
Remarque	S'il l'expression « être dérivable » pour une fonction à deux variables n'a pas de sens en général, puisque la dérivation se fait le long d'une direction, il existe néanmoins une notion globale : le gradient

Définition	Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in U$ Soient f une fonction définie sur U à valeur dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur U en a On appelle $gradient$ de la fonction f en a le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}_f}\,(\boldsymbol{a})\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})\\\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$; Nous avons $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}_f}\,(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$. Le gradient d'une fonction en un point a peut aussi se noter $\overrightarrow{\nabla f}(a)$, le symbole ∇ se lisant « nabla »
Exemple	Reprenons l'exemple de $f\colon\begin{Bmatrix}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\(x,y) \to e^{x^2-7y}\end{Bmatrix}$; f admet des dérivées partielles dans toutes les directions et en particulier : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-7y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -7e^{x^2-7y}$ Nous avons donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -7$. Nous avons donc $\overrightarrow{\nabla f}(0,0)\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$