Dérivation dans $\mathbb{R}^2$ composée de fonctions

Théorème

Règle de la chaine.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Soient $x: t \to x(t)$ et $y: t \to y(t)$ deux fonctions C^1 sur I et $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$
Soit f une fonction C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $F: \begin{Bmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \to f\big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$ est C^1 sur I et

$$\forall t \in I,\ F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$$

Preuve

La fonction F est une fonction à 1 variable. Il suffit donc de démontrer que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$$

$$F(t+h) = f\big(x(t+h), y(t+h)\big) = f(x(t) + x(t+h) - x(t), y(t) + y(t+h) - y(t))$$

Il est bien entendu que lorsque $h \to 0$ nous avons $x(t+h) - x(t) \to 0$ et $y(t+h) - y(t) \to 0$, les fonctions x et y étant continues. La fonction f étant C^1 sur U nous pouvons donc écrire son DL :

$$F(t+h) = f\big(x(t), y(t)\big) + (x(t+h) - x(t)) \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + (y(t+h) - y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) + o\left(\left\| \begin{matrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - x(t) \end{matrix} \right\|\right) (*)$$

$x(t+h) - x(t) = hx'(t) + o(|h|)$ et $y(t+h) - y(t) = hy'(t) + o(|h|)$

$$\left\| \begin{matrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - x(t) \end{matrix} \right\| = \sqrt{[hx'(t) + o(|h|)]^2 + [hy'(t) + o(|h|)]^2} = |h| \sqrt{[x'(t) + o(1)]^2 + [y'(t) + o(1)]^2}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{[x'(t) + o(1)]^2 + [y'(t) + o(1)]^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ Donc $\left(\left\| \begin{matrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - x(t) \end{matrix} \right\|\right) = o(h)$
Donc $o\left(\left\| \begin{matrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - x(t) \end{matrix} \right\|\right) = o(h)$

Revenons à $(*)$

$$F(t+h) = F(t) + [hx'(t) + o(|h|)] \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + [hy'(t) + o(|h|)] \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) + o(h)$$

$$F(t+h) = F(t) + hx'(t) \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + hy'(t) \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) + o(h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$$

Nous avons donc F dérivable sur I et $\forall t \in I$, $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$
La dérivée étant composée de fonctions continues nous en déduisons que F' est continue sur I, donc F est C^1 sur I .

Exemple

Soient $x: t \to 2 + \cos t$ et $y: t \to -3 \sin t$ deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit f : $\begin{Bmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x^2 - 2y^2 \end{Bmatrix}$ C^1 sur $\mathbb{R}^2$

On construit $F: \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to f\big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$;

F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$
$F'(t) = 2x(t)x'(t) - 4\, y(t)y'(t) = 2(2 + \cos t\,)(-sint) - 4(-3 \sin t)(-3 \cos t)$
$F'(t) = -2sint(2 + \cos t\,) - 36 \sin t cos\, t = -4 \sin t - 38 \sin t cos\, t$

Remarque

Nous traitons ici de fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mais qu'en est-il de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Sous quelles conditions peut on dire que ces fonctions sont C^1 ?
Reprenons l'exemple précédent avec les deux fonctions $x : t \to 2 + \cos t$ et $y : t \to -3 \sin t$ deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$. Il est aisé de construire la fonction $\gamma : \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$. Cette fonction est dite C^1 sur $\mathbb{R}$ car ses deux composantes x et y sont C^1 sur $\mathbb{R}$.
De manière génerale soit $\gamma : \begin{Bmatrix} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, x et y deux fonctions définies sur I.
γ sera dite C^1 sur I lorsque ses deux composantes x et y seront C^1 sur I.
γ est appelée **courbe paramétrée.**
Son vecteur dérivé $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'(t)} \\ \boldsymbol{y'(t)} \end{pmatrix}$

Théorème

Règle de la chaine (suite)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction C^1 sur U et à valeur dans $\mathbb{R}$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit $\gamma : \begin{Bmatrix} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$ une fonction C^1 sur I et $\forall t \in I,\ \gamma(t) \in U$

1. La fonction $F : \begin{Bmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \to f\big(x(t), y(t)\big) \end{Bmatrix}$ est C^1 sur I et $\forall t \in I$, $\boldsymbol{F'(t) = \overrightarrow{\nabla f}\big(\gamma(t)\big)\ .\ \overrightarrow{\gamma'(t)}}$
2. La fonction f peut être dérivée sur U dans n'importe quelle direction.

$$\forall a \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in U, \forall \vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad D_u f(a) = \overrightarrow{\nabla f}(a)\ .\ \vec{u} = u_x \frac{\partial f}{\partial x}\big(a_x, a_y\big) + u_y \frac{\partial f}{\partial y}\big(a_x, a_y\big)$$

Preuve

1. Le théorème précédent nous dit que :

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) * y'(t) = \overrightarrow{\nabla f}\big(\gamma(t)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix} .\ \overrightarrow{\gamma'(t)} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

2. U est un ouvert. Donc la fonction $F : t \to f(a + t\vec{u})$ est définie sur un intervalle réel J contenant 0 d'amplitude suffisamment petite.
$F : \begin{Bmatrix} J \to \mathbb{R} \\ t \to f(a + t\vec{u}) \end{Bmatrix}$; Nous avons $F(t) = f(a + t\vec{u}) = f\big(a_x + tu_x\ , a_y + tu_y\ \big)$
Pour nous remettre dans les hypothèses du théorème actuel nous pouvons donc poser $\gamma(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ avec $x(t) = a_x + tu_x$ et $y(t) = \ a_y + tu_y$
F est dérivable et $F'(0) = u_x \frac{\partial f}{\partial x}\big(a_x, a_y\big) + u_y \frac{\partial f}{\partial y}\big(a_x, a_y\big)$
Mais $F'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{F(0+t) - F(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} = D_u f(a)$ Donc

$$D_u f(a) = u_x \frac{\partial f}{\partial x}\big(a_x, a_y\big) + u_y \frac{\partial f}{\partial y}\big(a_x, a_y\big) = \overrightarrow{\nabla f}(a)\ .\ \vec{u}$$

Remarque

Le deuxième point nous renseigne sur le fait qu'il est possible de calculer la dérivée d'une fonction selon n'importe quel vecteur en s'appuyant seulement sur la dérivée de cette fonction selon $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$

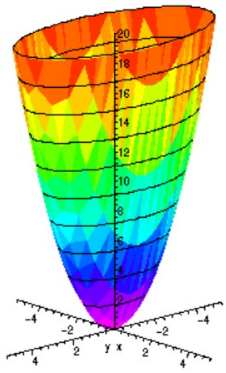
Définition

Nous avons vu que si f était une fonction à deux variables x et y, à valeurs dans $\mathbb{R}$, la représentation graphique dans $\mathbb{R}^3$ d'une telle fonction était la representation de $S = \{M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $z = f(x, y)\}$
Nous avons appelé cet ensemble de points une surface.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $C_\lambda = \{M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $z = f(x, y) = \lambda\ \}$
C_λ est donc inclus dans S.

C_λ est appelé une ligne de ligne de niveau de f

Exemple

Voici les lignes de niveau de la surface correspondant à l'équation
$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$



Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction C^1 sur U et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

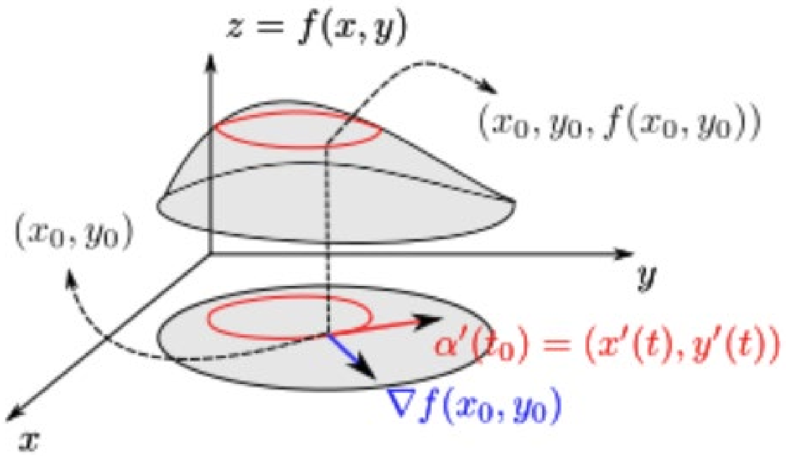
Preuve

Considérons $C_\lambda = \{M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $z = f(x, y) = \lambda\}$.
Nous souhaitons donc $f(x, y)$ soit constant sur un sous ensemble de U.
Nous allons ici faire un hypothèse forte et démontrer le théorème dans ce cadre.
$\{(x, y) \in U, tq\ f(x, y) = \lambda\}$ peut être représenté par une courbe paramétrée $\alpha(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,
La courbe étant C^1 sur un intervalle I.
Nous avons donc $\forall t \in I, f\big(x(t), y(t)\big) = \lambda$

Dérivons cette expression il vient : $\overrightarrow{\nabla f}\big(\gamma(t)\big)\ .\ \overrightarrow{\alpha'(t)} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\nabla f}\big(\alpha(t)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix}.\ \overrightarrow{\alpha'(t)} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ (vecteur tangent à la courbe paramétrée $\alpha(t)$) est orthogonal au vecteur gradient de f.

Illustration



Théorème

Soient A et B deux ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction C^1 sur A et à valeur dans $\mathbb{R}$.
Soient x et y deux fonctions C^1 définies sur B à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (u, v) \in B,\ (x(u, v), y(u, v)) \in A$
Alors la fonction F: $\begin{Bmatrix} B \to \mathbb{R} \\ (u, v) \to f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \end{Bmatrix}$ est C^1 sur B et

$$\forall (u, v) \in B, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\big(x(u, v), y(u, v)\big) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

$$\forall (u, v) \in B, \quad \frac{\partial f}{\partial v}\big(x(u, v), y(u, v)\big) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

Preuve

La première ligne est la simple application de la règle de la chaine à v constant
La deuxième ligne est la simple application de la règle de la chaine à u constant
Dans les deux cas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial v}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$ sont continues, on en déduit la continuité de $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$
F est donc bien C^1 sur B

Exemples	• Prenons les fonctions $x(u,v) = 3uv$ et $y(u,v) = u^2 + v^2$ Il vient : $\frac{\partial f}{\partial u}\big(x(u,v), y(u,v)\big) = 3v * \frac{\partial f}{\partial x}(3uv, u^2 + v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(3uv, u^2 + v^2)$ • Passge en coordonnées polaires : $x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ et $y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$ $\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$