Extremums locaux d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

Définition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$

- On dit que f admet un maximum local en a si f est **majorée** par $f(a)$ dans un voisinage de a
- On dit que f admet un minimum local en a si f est **minorée** par $f(a)$ dans un voisinage de a
- On dit que f admet un **extremum** local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a

Définition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.
Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$

On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0}$

Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.
Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$

f admet un **extremum** local en a implique que a soit un **point critique** de f.

Preuve

Posons $a\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a_x + u, a_y + v) \in U$
Nous avons vu que f étant C^1 sur U :

$$f(a_x + u, a_y + v) = f(a_x, a_y) + u\frac{\partial f}{\partial x}(a_x, a_y) + v\frac{\partial f}{\partial y}(a_x, a_y) + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$
$$\Rightarrow f(a_x + u, a_y + v) - f(a_x, a_y) = u\frac{\partial f}{\partial x}(a_x, a_y) + v\frac{\partial f}{\partial y}(a_x, a_y) + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

f admet un **extremum** local en a implique que $f(a_x + u, a_y + v) - f(a_x, a_y)$ soit de signe constant $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$
Cela n'est possible que si $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0}$

Remarque

Attention le fait d'être un point critique n'entraine pas forcément l'existence d'un extremum local.
Pour vous en convaincre il suffit de faire l'analogie avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
En effet pour qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ admette un extremum il faut que la dérivée s'annule en changeant de signe. Le simple fait de s'annuler ne suffit pas.
Prenons la fonction $x \to x^3$. La dérivée de cette fonction s'annule en $x = 0$, pourtant cette fonction n'admet pas d'extremum local en $x = 0$.
Revenons aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$. Les extremums locaux de ces fonctions sont forcément atteints sur des points critiques. Donc il convient avant toute chose de recencer ces points critiques. Une fois ces points critiques trouvés, il faudra mettre en évidence par le calcul l'existence d'un éventuel extremum local.

Exemple

Déterniner les points critiques et les éventuels extremums locaux des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$

Solution

Remarquons que les fonctions f et g sont polynomiales. Elles sont donc bien sur C^1 sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (x, y) = (0,0)$$

Donc f n'admet qu'un point critique $(0,0)$.
Est-ce un extremum local ?

$$f(x, y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + xy + 1 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1$$

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) - f(0,0) \geq 0 \Rightarrow f(0,0)$ est un minimum local.

Passons à g :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y + 4x$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x + 4y = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (x, y) = (0,0)$$

Donc g n'admet qu'un point critique $(0,0)$.

Est-ce un extremum local ?

$$g(x,y) - g(0,0) = x^2 + y^2 + 4xy - 2 + 2 = x^2 + y^2 + 4xy = (x+y)^2 + 2xy$$

$g(x,0) - g(0,0) = x^2$ Donc on a $g(x,0) - g(0,0) \geq 0$
$g(x,-x) - g(0,0) = -2x^2$ Donc on a $g(x,-x) - g(0,0) \leq 0$

Selon le voisinage de $(0,0)$, la fonction peut aller au dessus ou en dessous de $g(0,0)$.
$g(0,0)$ n'est donc pas un extremum local.