Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Nous avons déjà abordé la topologie de $\mathbb{R}$, nous allons maintenant l'étendre à $\mathbb{R}^2$. Cela ne modifiera pas grand-chose, la principale différence résidant dans le fait que la distance de $\mathbb{R}$: la valeur absolue sera remplacée par la distance euclidienne. $\mathbb{R}^2$ sera donc considéré ici comme un espace vectoriel normé.

Propriété

La distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ application qui à tout vecteur $u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ associe $\sqrt{x^2+y^2}$ est une norme et est souvent notée $\|\square\|$

Preuve

Démontrer les trois axiomes :

1. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^2}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ne revêt aucune difficulté

Définition

Soient x un point de $\mathbb{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}^{*+}$
Une **boule ouverte** de centre x et de rayon R est $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-y\| < R\}$. On la note : $B(x,R)$

Définition

Soit x un point de $\mathbb{R}^2$.
Un **voisinage** de x noté V_x est un ensemble de points contenant une boule ouverte de centre x

Définition

Un ensemble de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** *ssi* c'est un voisinage de chacun de ses points.

Définition

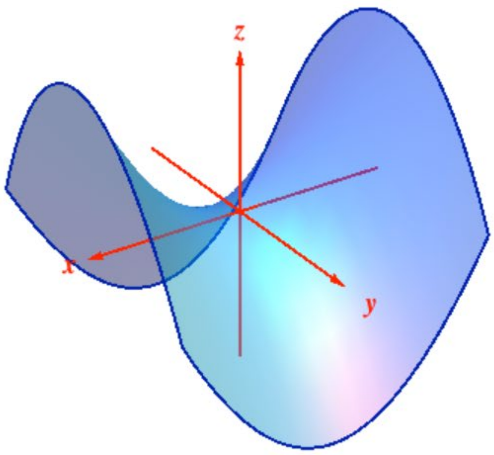
Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$. La représentation graphique dans $\mathbb{R}^3$ de la fonction f est la représentation de

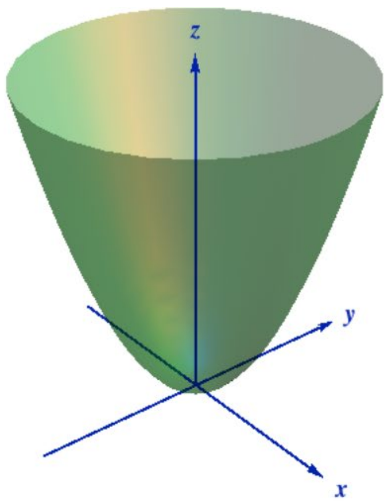
$$\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ avec } (x,y) \in E \text{ tels que } z = f(x,y)\right\}$$

Cet ensemble de points est appelé une surface.

Exemple



$z = f(x,y) = x^2 - y^2$



$z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, Soit $a \in E$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l en a et on note $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = l}$ *ssi*

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(a,\eta) \cap E, |l - f(x)| < \varepsilon}$$

Exemple	• La fonction $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ admet en $(0,0)$ une limite qui est 0 • La fonction f : $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}^2 - \{0;0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \frac{xy}{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ n'admet pas de limite en 0. Le fait que $\forall x \neq 0\ f(x,0) = 0$ et $\forall y \neq 0\ f(0,y) = 0$ pourrait laisser penser que la fonction tend vers 0 en $(0,0)$. Cependant le passage en polaire $\left\{\begin{matrix}x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\end{matrix}\right\}$ nous donne pour $\rho \neq 0$ $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \cos\theta\sin\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}$; Il vient : La limite en 0 de f ne pouvant pas dépendre de θ nous en déduisons que f n'admet pas de limite en 0.
Définition	Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f: E \to \mathbb{R}$, Soit $a \in E$. On dit que f est continue en $a\ ssi\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(a,\eta) \cap E, \lvert f(a) - f(x)\rvert < \varepsilon$
Exemple	Là encore : • La fonction $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ • La fonction f : $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}^2 - \{0;0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \frac{xy}{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{0;0\}$ mais n'admet pas de prolongement par continuité en $0_{\mathbb{R}^2}$