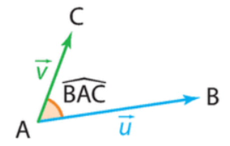
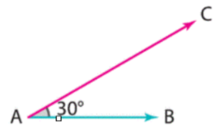
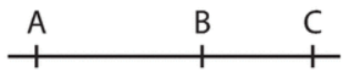
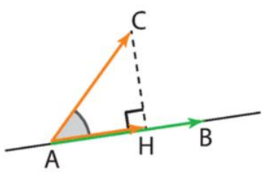
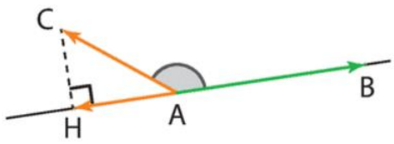
Produit scalaire, colinéarité, orthogonalité Cours.

Produit scalaire, colinéarité, orthogonalité

Définition	**Angle de deux vecteurs**	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient deux représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ On note $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle géométrique $\widehat{BAC}$	
Définition	**Produit scalaire**	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de ces 2 vecteurs le réel défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert * \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ le produit scalaire s'écrit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\widehat{BAC})$	
Remarque	$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \lVert AB \rVert^2 \cos 0 = AB^2$		
Exemple	Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 30°$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\widehat{BAC}) = 2 * 3 * \cos(30°) = 6 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$		
Propriétés	• Pour tous $\vec{u}$,$\vec{v}$ on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie) • Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors ○ $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ○ $\vec{u}.\vec{v} = -\lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire		

Démonstration

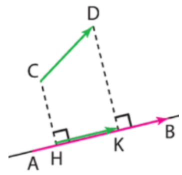
- $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert * \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \lVert\vec{v}\rVert * \lVert\vec{u}\rVert * \cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = \vec{v}.\vec{u}$
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :
  - Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = 1$ et donc $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert$
  - Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -1$ et donc $\vec{u}.\vec{v} = -\lVert\vec{u}\rVert * \lVert\vec{v}\rVert$

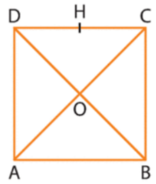
Exemple	Soient trois points A, B, C alignés dans cet ordre. AB=3 AC=5 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\widehat{BAC}) = 3 * 5 = 15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA * BC * \cos(\widehat{ABC}) = -3 * 2 = -6$ $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB * CA * \cos(\widehat{ACB}) = 2 * 5 = 10$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = AB * CB * \cos(\widehat{ABC}) = -3 * 2 = -6$		
Propriété	**Produit scalaire et projection orthogonale.**	Soient A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)	
		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB * AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire
			

Démonstration

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\widehat{BAC})$$

- Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens : $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{HAC})$. Dans le triangle HAC rectangle en H, $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \frac{AH}{AC} = AB * AH$
- Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas de même sens : $\cos(\widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{HAC})$. Dans le triangle HAC rectangle en H, $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * -\frac{AH}{AC} = -AB * AH$

Remarque	Dans le cas général pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ on peut projeter les points C et D sur la droite (AB). On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$. On dit que le projeté du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{HK}$	

<table>
<tr><td>Exemple</td><td>Dans le carré ABCD ci-contre de centre O et de rayon 4. On a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AB = 4 * 4 = 16$ (car B est le projeté orthogonal de C sur (AB))
$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CD} = -4 * 2 = -8$ (car $\overrightarrow{DH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AO}$ sur (DC))</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="2">Deux droites d et d' sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Démonstration</td></tr>
<tr><td colspan="3">Deux droites sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ forment un angle de $\pm 90°$ ($\pm\frac{\pi}{2}$ rad).
$\cos(\pm 90°) = 0$. On a $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}|| * \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$. Leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.</td></tr>
</table>