Propriétés produit scalaire

Propriété produit scalaire		
Propriété	**Bilinéarité**	Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k. • $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ • $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$
Propriété	**Utilisation des normes**	• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u}-\vec{v}\|\|^2\right)$ • $\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2 = \|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
Démonstration		
• $\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v} = \|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ • $\|\|\vec{u}-\vec{v}\|\|^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v} = \|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} \rightarrow$ $2\vec{u}.\vec{v} = \|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u}-\vec{v}\|\|^2 \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u}-\vec{v}\|\|^2\right)$		
Propriété	**Dans un repère orthonormé, si** $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$	
Démonstration		
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ce repère orthonormé. $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}) = xx'\vec{\imath}.\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$ Le repère est orthonormé, cela signifie que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux (et donc $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$) et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont tous les deux une normé égale à 1. $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\|\vec{\imath}\|\|^2 = \|\|\vec{\jmath}\|\|^2 = 1$. Il vient $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$		
Propriété	**Dans un repère orthonormé, deux vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ce qui se traduit par $xx'+yy' = 0$	
Exemple	**On considère les vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut : $\vec{u}.\vec{v} = 2*(-3)+3*(-5) = -6-15 = -21 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.	