Dérivabilité et dérivée de la fonction valeur absolue

Propriété	La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. (Elle n'est pas dérivable en 0)

Démonstration

$|x| = x \; si \; x \geq 0 \; et \; |x| = -x \; si \; x < 0$. Déterminons le nombre dérivé en 0.

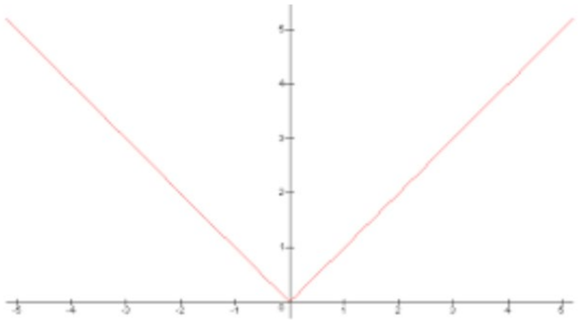
$$\lim_{h\to0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h} = -1$$

Si h tend vers 0 par valeurs positives, le nombre dérivée vaut 1, si h tend vers 0 par valeurs négatives, le nombre dérivé vaut -1. Le nombre dérivé doit rester le même quelque soit la manière dont h se rapproche de 0. La fonction n'est donc pas dérivable en 0. Déterminons maintenant le nombre dérivé en n'importe quel nombre $x_0 \neq 0$

Si $x_0 > 0$ $\lim_{h\to0^+}\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{h}{h} = 1$
Le nombre dérivé en x_0 vaut 1.

Si $x_0 < 0$ $\lim_{h\to0^+}\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{-x_0-h+x_0}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{-h}{h} = -1$
Le nombre dérivé en x_0 vaut -1.

Courbe représentative



Dérivabilité et dérivée de la fonction racine carrée.

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. (Elle n'est pas dérivable en 0)

Démonstration

Déterminons le nombre dérivé en 0.

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}^2} = \lim_{h\to0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Lorsque h tend vers 0 par valeurs positive le nombre dérivé tend vers $+\infty$. Cela signifie que la fonction n'est pas dérivable en 0.
En n'importe quel autre point où l'abscisse x_0 n'est pas nulle nous avons :
$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (Démonstration hors programme)

Courbe représentative