Lien dérivée variation extrémums

Lien dérivée-variations fonctions

Propriété	**Variations d'une fonction et signe de sa dérivée**	Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. • Si la fonction f est croissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ • Si la fonction f est décroissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ • Si la fonction f est constante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$
Propriété	**Signe de la dérivée et variation d'une fonction**	Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. • Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ (sauf en un nombre fini de points où elle s'annule) alors la fonction f est strictement croissante sur I. • Si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ (sauf en un nombre fini de points où elle s'annule) alors la fonction f est strictement décroissante sur I. • Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 9$$

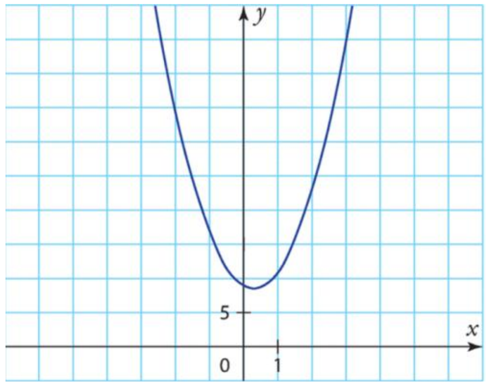
$$f'(x) = 5 * 2x \quad -3 = 10x - 3$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 10x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 10x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{10}$$

Nous avons donc le tableau de variations ci-bas :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	↘		$\frac{81}{10}$		↗

Courbe de la fonction



Nombre dérivé et extremums locaux

Définition	**Minimum local et maximum local**	Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet un maximum local en x_0 si il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0 et tel que, pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ On dit que f admet un minimum local en x_0 si il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0 et tel que, pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$ Un minimum ou maximum local est appelé un extrémum local.

Exemple

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;7]$ dont voici le tableau de variations ci-contre.
D'après le tableau de variations $f(x) \geq f(-1)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-8\,;4[$ donc la fonction f admet un minimum local en -1 qui vaut -2. Ce n'est pas le minimum de la fonction car $f(7) = -5$

x	-8	-1	4	7
Variations de f	10 ↘	-2 ↗	6 ↘	-5

Propriété	Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Et soit x_0 un réel appartenant à I. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Propriété	Caractérisation d'un extremum	Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a\,;b[$. Soit $x_0 \in I$ Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 (on dit que f' s'annule en changeant de signe en x_0) alors f admet un extremum local en x_0.