Fonction dérivée		

Fonction dérivée		
Définition	**Fonction dérivée sur un intervalle I**	On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel a de I. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de la fonction f sur un intervalle I la fonction f' qui à tout réel x de I fait correspondre $f'(x)$. $f' : x \to f'(x)$
Exemples	• Soit $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soient a et h deux réels. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2+h^2+2ah-a^2}{h} = \frac{h^2+2ah}{h} = h + 2a$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2a) = 2a$ Nous en déduisons que la fonction f est dérivable en tout point a et que $f'(a) = 2a$ La fonction dérivée de la fonction f est donc la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$ • Soit $f : x \to x$ définie sur $\mathbb{R}$. Soient a et h deux réels. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h) \quad - a}{h} = \frac{h}{h} = 1$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(1) = 1$ Nous en déduisons que la fonction f est dérivable en tout point a et que $f'(a) = 1$ La fonction dérivée de la fonction f est donc la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 1$ • Soit $f : x \to k$ définie sur $\mathbb{R}$. k étant une constante. Soient a et h deux réels. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k \quad - k}{h} = 0$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$ Nous en déduisons que la fonction f est dérivable en tout point a et que $f'(a) = 0$ La fonction dérivée de la fonction f est donc la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 0$ **La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.**	
Théorème	**Dérivée d'une somme.**	La fonction $u + v$ définie sur I par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'$
Exemple	Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + 1$	
Théorème	**Dérivée d'un produit.**	La fonction $u * v$ définie sur I par $(u * v)(x) = u(x) * v(x)$ est dérivable sur I et **$(uv)' = u'v + v'u$**
Exemples	• Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2(x^2+x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x * (x^2+x) + x^2 * (2x+1) = 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + x^2 = 4x^3 + 3x^2$ • Pout tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3 * 2x + 0 * x^2 = 6x$	
Démonstration (pas exigible)		
Remarque	• On en déduit immédiatement que les fonctions $u \to ku$ avec k réel et $u \to u^2$ sont dérivables sur I et que $(ku)' = ku'$ ainsi que $(u^2)' = 2uu'$ • Conséquence des théorèmes précédents, les fonctions polynômes et affines sont dérivables sur $\mathbb{R}$.	

Propriété	Les dérivées des fonctions usuelles sont :

Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	Dérivabilité	f'(x)
Définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ (k constante)	Sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$	Sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$	Sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 2\,x$
Définie sur $\mathbb{R}$ par f$(x) = x^3$	Sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 3\,x^2$
Définie sur $\mathbb{R}$ par f$(x) = x^n$ (n entier et ≥ 2)	Sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$	Sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
Définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	Sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$	Sur $\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

Nous allons démontrer que la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est égale à $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$Soit\ x_0 \neq 0 \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x_0+h)}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x_0+h)}-\frac{1}{x_0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x_0}{(x_0+h)}-\frac{(x_0+h)}{x_0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(-\frac{h}{x_0(x_0+h)}\right) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

Exemples

- Si $f(x) = x^7$ alors $f'(x) = 7x^6$
- Si $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors nous pouvons écrire $f(x) = x^{-5}$
  Il vient $f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$