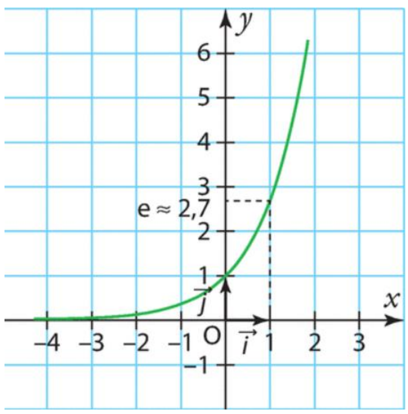
# Fonction exponentielle

| Fonction exponentielle | | |
|---|---|---|
| **Définition et propriétés** | Il existe une unique fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$<br>Cette fonction est appelée fonction exponentielle. | |
| **Propriété** | • Pour $a$ et $b$ réels $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$<br>• La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ | |
| **Démonstration (facultative)** | | |
| **Propriété** | On en déduit les propriétés suivantes :<br>• Pour $a \in \mathbb{R}$ $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$<br>• Pour $a \in \mathbb{R}$ et b∈$\mathbb{R}$ $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$<br>• Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ $(\exp(a))^n = \exp(na)$ | |
| **Preuve** | • $\exp(a)\exp(-a) = \exp(\mathrm{a}-\mathrm{a}) = \exp(0) = 1$. $\exp(a) > 0$ donc $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$<br>• $\exp(a-b+b) = \exp(a-b)\exp(b) \Leftrightarrow \exp(a) = \exp(a-b)\exp(b) \Leftrightarrow \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ car $\exp(b) > 0$<br>• $(\exp(a))^n = \exp(a) * \exp(a) * \dots . \exp(a) = \exp(a + a + \cdots a) = \exp(na)$ | |
| **Définition** | Le nombre $e$ est défini par $e = \exp(1)$. $e \approx 2{,}72$ | |
| **Notation** | Après avoir remarqué que pour n entier $\exp(n) = e^n$ et que les propriétés ci-dessus sont analogues aux règles de calcul des puissances nous introduisons la nouvelle notation pour $x$ réel $\exp(x) = e^x$ | |
| **Propriété** | Les propriétés précédentes deviennent : | |
| | • Pour $a$ et $b$ réels $e^{a+b} = e^a * e^b$<br>• Pour $a$ réel $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ | • Pour $a$ et $b$ réels $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$<br>• Pour $a$ réel et $n \in \mathbb{N}$ $(e^a)^n = e^{na}$ |
| **Exemples** | • $e^{10} = e^{3+7} = e^3 * e^7$<br>• $e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$ | • $e^{10-1} = \frac{e^{10}}{e^1}$<br>• $(e^{2,5})^3 = e^{3*2,5} = e^{7,5}$ |
| **Propriétés** | • Pour tout $a \in \mathbb{R}$ $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.<br>• La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction exponentielle $(e^x)' = e^x$<br>• Si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$ où $u$ est une fonction affine de la forme $u(x) = ax + b$, alors $f$ est dérivable et $f'(x) = ae^{u(x)} = af(x)$<br>• La dérivée de la fonction exponentielle étant strictement positive il vient que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ | |
| **Démonstration (facultative)** | | |
| **Exemple** | Si $f(x) = e^{3x-5}$, $f'(x) = 3e^{3x-5} = 3f(x)$ | |
| **Propriété** | La fonction exponentielle est représentée par la courbe ci-contre : |  |
| **Propriété** | Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$<br>• Si $k > 0$, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$<br>• Si $k < 0$, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ | |
| **Démonstration (facultative)** | | |