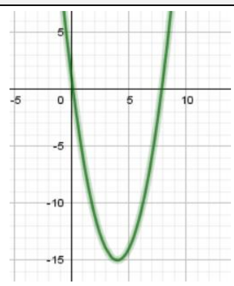
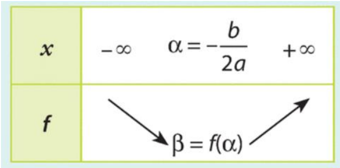
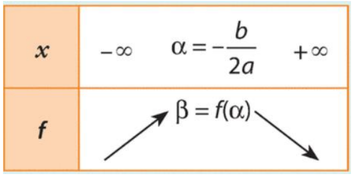
Différentes formes d'un polynôme du second degré		
Forme développée	**Définition**	Un polynôme du second degré est une fonction f vérifiant pour tout x, $$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$ a, b et c étant des réels quelconques. Il s'agit de la forme développée de $f(x)$
	Exemple	P défini par $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ est un polynôme du second degré.
Forme canonique	**Définition**	On appelle discriminant d'un polynôme du second degré et on note Δ le nombre qui est égal à $b^2 - 4ac$
	Exemple	Reprenons l'exemple précédent du polynôme f défini par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Pour ce polynôme nous avons $a = 3,\ b = -5,\ c = 1$ Le discriminant de ce polynôme est donc égal à $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 3 * 1 = 25 - 12 = 13$$
	Définition	Soit f un polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$. f admet une écriture dite forme canonique telle que pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2$+β avec $\alpha = \left(-\frac{b}{2a}\right);\ \beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$
	Démonstration	
		Lorsque $a \neq 0, f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$ $$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$ $$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$ Posons $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $et\ \beta = -\frac{(b^2-4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ Nous avons $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et en remplaçant x par α il vient $\beta = f(\alpha)$
	Exemple	Soit f défini par $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$. Nous avons $a = 2,\ b = -8,\ c = 12$ Déterminons les valeurs de α, β et Δ. $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 * 2 * 12 = 64 - 8 * 12 = -32$. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2*2} = \frac{8}{4} = 2$ $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-32}{4 * 2} = \frac{32}{8} = 4$ La forme développée de f peut donc s'écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x - 2)^2 + 4$
	Remarque :	Tout polynôme du second degré admet une forme canonique.
	Propriété :	Dans un repère, la parabole représentative de la fonction f admet pour sommet le point de coordonnées $S(\alpha, \beta)$
	Démonstration	
		Soit une fonction f dont la forme canonique peut s'écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ $$(x - \alpha)^2 \geq 0 \ donc\ lorsque \begin{cases} a \geq 0\ f\ admet\ un\ minimum\ en\ x = \alpha\ qui\ vaut\ \beta \\ a < 0\ f\ admet\ un\ maximum\ en\ x = \alpha\ qui\ vaut\ \beta \end{cases}$$ Dans les deux cas, le sommet de la parabole admet pour sommet le point de coordonnées $S(\alpha, \beta)$
	Exemple	Considérons la forme canonique du polynôme f défini par $f(x) = (x - 4)^2 - 15$ $a = 1; \alpha = 4; \beta = -15$ $a > 0$. Donc Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -15$. f admet donc un minimum qui est -15 en $x = 4$ Le sommet de la parabole est le point $S(4;\ -15)$ 

Sens de variation et représentation graphique

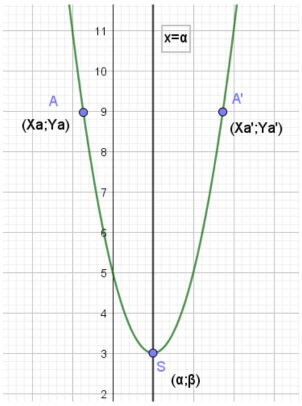
Propriété

Soit une fonction f polynôme de degré 2 vérifiant pour tout x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Si $a > 0$	Si $a < 0$
	
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ f est strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$ f admet comme minimum β *en* α	f est strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$ f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ f admet comme maximum β *en* α

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite $x = \alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$

Démonstration



Soit une fonction f polynôme du second degré. Plaçons la sous sa fome canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Soit le point A de coordonnées $(x_A; y_A)$. Ce point appartient à la courbe réprésentative de f. Donc $y_A = a(x_A - \alpha)^2 + \beta$

Soit le point A' symétrique du point A par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$

A' a pour coordonnées $(x_{A'}; y_{A'})$.

$$\begin{cases} x_{A'} = \alpha + (\alpha - x_A) = \alpha + \alpha - x_A = 2\alpha - x_A \\ y_{A'} = y_A \end{cases}$$

Le point A' appartient-il à la courbe ?

$$a(x_{A'} - \alpha)^2 + \beta = a(2\alpha - x_A - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - x_A)^2 + \beta = a(x_A - \alpha)^2 + \beta = y_A = y_{A'}$$

Donc oui le point A' appartient à la courbe. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \alpha$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 10$$

f est une fonction polyôme de degré 2 et on a

$a = 4\,; b = 8\,; c = -10.\ \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2*4} = -1$

$\beta = f(\alpha) = 4*(-1)^2 + 8*(-1) - 10 = -14$

La forme factorisée est donc :

$$f(x) = 4(x+1)^2 - 14$$

$a = 4;\ a > 0$ donc on a le tableau de variations ci-contre.