Forme factorisée.

Forme factorisée

Propriété

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-u)(x-v)$ où a, u et v désignent des nombres réels $(a \neq 0)$ est une fonction polynôme du second degré. On dit que f est donné sous forme factorisée

Démonstration

$f(x) = a(x-u)(x-v) = a(x^2 - ux - vx + uv) = ax^2 - a(u+v)x + auv$
Nous retrouvons donc un polynôme du second degré donné sous forme développée.

Remarque

Tous les polynômes du second degré n'admettent pas de forme factorisée.

Propriété

Lorsque le polynôme f admet la forme factorisée $f(x) = a(x-u)(x-v)$, L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions u et v. On dit que u et v sont les racines ou les zéros de f.

Propriété

En se ramenant la notation de la forme développée il vient $u + v = -\frac{b}{a}$ (somme des racines) et $uv = \frac{c}{a}$ (produit des racines)

Démonstration

Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$
Forme factorisée : $f(x) = a(x-u)(x-v)$
Développons la forme factorisée, il vient (cf au-dessus) $f(x) = ax^2 - a(u+v)x + auv$
En identifiant les coefficients de x^2, x, x^0 il vient

$$\begin{cases} a = a \\ -a(u+v) = b \\ auv = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = a \\ (u+v) = -\dfrac{b}{a} \\ uv = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Remarque

Avec la propriété précédente il est aisé lorsqu'on connait une racine évidente du polynôme d'en déduire la seconde.
Exemple : $f(x) = x^2 - 6x + 5$ admet comme racine évidente 1.
Soit α l'autre racine. $1 + \alpha = -\frac{b}{a} = \frac{6}{1} = 6$ donc $\alpha = 5$

Propriété

Lorsqu'un polynôme f peut se mettre sous forme factorisée, son signe se détermine aisément à l'aide d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		u		v		$+\infty$
$x-u$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-v$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a(x-u)(x-v)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = -4(x+2)(x+1)$ Le signe de f est donné ci bas

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résolution d’équation du second degré

Définition : Résoudre une équation du second degré, c’est trouver l’ensemble des x tels que $ax^2 + bx + c = 0$ (a≠0) et ainsi déterminer une forme factorisée. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

	Forme factorisée	Solutions
$1er\ cas$ $\Delta > 0$	Le polynôme f peut s’écrire sous la forme factorisée suivante : $f(x) = a(x - x1))(x - x2) = 0$ Avec $x1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	L’équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions distinctes : $x1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$2ème\ cas$ $\Delta = 0$	Le polynôme f peut s’écrire sous la forme factorisée suivante : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	L’équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x = \frac{-b}{2a}$
3ème cas Δ<0	Pas de forme factorisée	Pas de solution à l’équation $f(x) = 0$

Démonstration

Lorsque $a \neq 0, f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] =$
$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1er cas Δ>0	$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ $f(x) = a(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})\,(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$. Posons $x1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $et\ x2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $f(x) = a(x - x1)\,(x - x2)$. L’équation $f(x) = 0$ admet bien 2 solutions distinctes $x1$ et $x2$
2ème cas Δ=0	La factorisation suivante fonctionne encore mais comme $\Delta = 0, f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. L’équation $f(x) = 0$ admet donc une seule solution $x = -\frac{b}{2a}$
3ème cas Δ<0	$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. $-\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$ Donc impossible de factoriser avec l’identité remarquable. L’équation $f(x) = 0$ n’admet pas de solutions. f ne peut pas s’annuler.