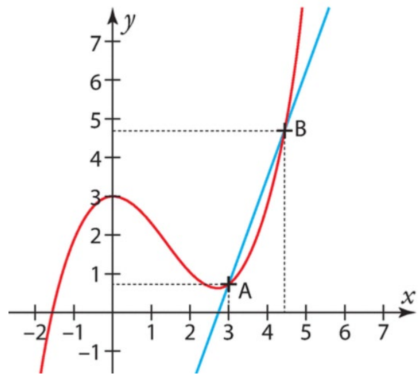
Tangente à une courbe, nombre dérivé
Contexte : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère O, I, J. a et b désignent des réels de l'intervalle I. A et B sont des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_A = a$ et $x_B = b$.

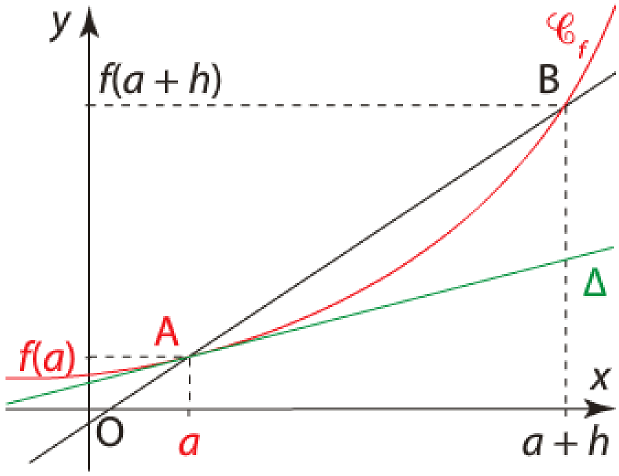
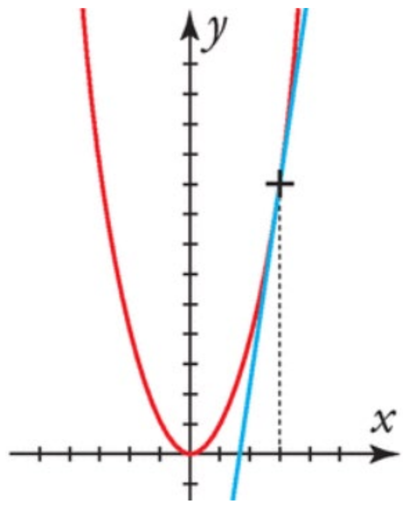
<table>
<tr><th colspan="3">Taux de variation</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Taux de variation</td><td>Le taux de variation de la fonction f entre a et b $(a \neq b)$ est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Lorsque $b = a + h$ $(h \neq 0)$ ce taux s'écrit $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interprétation graphique du taux de variation :

Soit A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(b, f(b))$
Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{y_B-yA}{xB-xA}$ c'est-à-dire à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Le taux de variation entre $x = a$ et $x = b$ est donc égal au coefficient directeur de la droite (AB) où A est le point de la courbe d'abscisse a et B le point de la courbe d'abscisse b</td><td></td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Le taux de variation de la fonction $f: x^2 - 3x + 2$ entre 4 et 7 est égal à $\frac{f(7)-f(4)}{7-4} = \frac{30-6}{7-4} = \frac{24}{3} = 8$
C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AB) sécante à la courbe représentative de f en $A(4; 6)$ et $B(7; 30)$ est égal à 8</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">Ce taux de variation se note parfois $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a, b)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Nombre dérivé</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Nombre dérivé</td><td>Soit h un réel non nul suffisamment petit pour que $a + h \in I$.
On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation de f entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0.
Ce nombre est appelé nombre dérivé et est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">On peut aussi dire que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre a et x tend vers un unique nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a.
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exemples :</td><td colspan="2">On considère la fonction $f : x \text{—>} x^2$ et $a = 3$. Que vaut $f'(3)$?
$\frac{\Delta f}{\Delta x}(3{,}3 + h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{3^2+h^2+6h-3^2}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h + 6$
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} h + 6 = 6$$</td></tr>
<tr><td>On considère la fonction
$g : [0\,; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \text{—>} \sqrt{x}$</td><td>$\frac{\Delta g}{\Delta x}(0{,}0 + h) = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
Je remarque que $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}(0{,}0 + h) = +\infty$ .Lorsque h tend vers 0 $\frac{\Delta g}{\Delta x}(0{,}0 + h)$ devient de plus en plus grand et ne tend pas vers un réel. Nous en déduisons que la fonction g n'est pas dérivable en 0.</td></tr>
</table>

Interprétation géométrique du nombre dérivé		
Définition	Soit f une fonction **dérivable** en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(a+h, f(a+h))$ Lorsque le point B se rapproche du point A, la corde (AB) se rapproche d'une droite passant par A et tangente à la courbe. On appelle cette droite la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A. Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Lorsque le point B se rapproche du point A cela signifie que $h \to 0$ Nous en déduisons que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ soit par définition au **nombre dérivé** $\boldsymbol{f'(a)}$. **En résumé :** Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est égal à $\boldsymbol{f'(a)}$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$	
Exemple	La courbe représentative de la fonction $g: x \to x^2$ est une parabole que l'on nommera $\mathcal{P}$. Si on place sur cette courbe $\mathcal{P}$, le point d'abscisse 3, alors la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 (rappel $f'(3) = 6$) est la tangente à $\mathcal{P}$ en A au point d'abscisse 3.	
Propriété	L'équation réduite de la tangente est : $\boldsymbol{y = f'(a)\,(x-a) + f(a)}$.	
Démonstration		
Nous savons que $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $x = a$ L'équation de la tangente peut donc s'écrire $y = f'(a)x + p$ avec p nombre réel quelconque. Or nous savons que cette tangente passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$. Nous pouvons donc écrire : $f(a) = f'(a)a + p \to p = f(a) - af'(a)$. Remplaçons p dans la première équation il vient : $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \to \boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$		
Exemple	L'équation réduite de la tangente à la courbe de $g: x \to x^2$ en $x = 3$ est : $y = f'(3)(x-3) + f(3) = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$	