Opérations et dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Théorème	**Dérivée d'un produit. (Rappel)**	La fonction $u * v$ définie sur I par $(u * v)(x) = u(x) * v(x)$ est dérivable sur I et $(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v + v'u}$

Démonstration

Dérivons la fonction $x \to (uv)(x)$ en x_0

$$\frac{(uv)(x_0+h)-(uv)(x_0)}{h} = \frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h} =$$

$$\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0+h)v(x_0)+u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$= \frac{u(x_0+h)[v(x_0+h)-v(x_0)]+v(x_0)[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h}$$

$$= u(x_0+h)\frac{[v(x_0+h)-v(x_0)]}{h} + v(x_0)\frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(uv)(x_0+h)-(uv)(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\ u(x_0+h)\frac{[v(x_0+h)-v(x_0)]}{h} + v(x_0)\frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} u(x_0+h) * \lim_{h\to 0}\frac{[v(x_0+h)-v(x_0)]}{h} + v(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h} = u(x_0)v'(x_0)+v(x_0)u'(x_0)$$

Il vient et $(uv)'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + v'(x_0)\,u(x_0)$ et en terme de fonctions et $(uv)' = u'\,v + v'\,u$

Exemples :	Pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ on obtient $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 * \sqrt{x} + x * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2} * \sqrt{x}$

Théorème	**Dérivée de l'inverse d'une fonction**	On suppose pour tout nombre réel x de I, $v(x) \neq 0$ La fonction $\frac{1}{v}$ définier sur I par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'}{v^2}(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}}$

Exemple	Pour tout réel $x, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On pose $v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x$ donc $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Théorème	**Dérivée d'un quotient**	On suppose pour tout nombre réel x de I, $v(x)\neq 0$ La fonction $\frac{u}{v}$ définie sur I par $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \boldsymbol{\left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$

Exemple	Pour tout réel x, $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$. On pose $u(x) = 3x - 2$; $v(x) = x^2 + 1$; $u'(x) = 3$; $v'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$
Théorème	Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle J. Alors la fonction h composée de g suivie de f définie par $\boldsymbol{h(x) = f(ax+b)}$ est dérivable sur I, et on a pour tout réel x de I : $\boldsymbol{h'(x) = af'(ax+b)}$
Exemple	Soit f la fonction définie sur $J = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $I = [\frac{5}{2} ; +\infty[$ par $g(x) = 2x - 5$. h est définie sur $[\frac{5}{2} ; \infty[$ par $h(x) = f(2x-5) = \sqrt{2x-5}$ Après calculs, h est dérivable sur $[\frac{5}{2} ; \infty[$ et $h'(x) = 2f'(2x-5) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$