Probabilités conditionnelles. Arbres pondérés.

Cours.

Dans tout le chapitre A et B désignent deux événements d'un univers Ω et p une probabilité sur Ω

Probabilités conditionnelles

Contexte

Dans ce chapitre on considère que $p(A) \neq 0$

Définition

$p_A(B)$ désigne la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé. On dit que c'est une probabilité conditionnelle.

Exemple

Considérons le tableau ci-contre qui donne la fréquentation de spectateurs d'une salle de cinéma en fonction du tarif et de l'heure de journée.
Considérons maintenant deux événements lorsque je choisis une personne au hasard dans cette population :

- « M » La personne a assisté à la séance du matin
- « D » La personne a payé demi-tarif

$$\boldsymbol{p_D(M)} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{117}} \textbf{ et } \boldsymbol{p_M(D)} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{194}}$$

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

Propriété

$$p(A \cap B) = p(A) * p_A(B) \iff p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple

On tire un objet au hasard dans le stock d'une usine constitué de claviers (Evénement C) et de souris (Evénement S) en deux versions : familiale (Evénement F) ou gamer (Evénement G).
30% du stock est composé de souris. 40% des souris sont des souris gamer. Par ailleurs 63% du stock est composé de claviers familiaux.
Déterminons $\boldsymbol{p(S \cap G)}$: : la probabilité pour que l'objet soit une souris gamer et $\boldsymbol{p_C(F)}$ **:** la probabilité de tirer un objet familial sachant que c'est un clavier.

D'après l'énoncé $p(S) = 0{,}3$; $p_S(G) = 0{,}4$; $p(C \cap F) = 0{,}63$

- $\boldsymbol{p(S \cap G)} = p(s) * p_S(G) = 0{,}4 * 0{,}3 = 0{,}12$
- $\boldsymbol{p_C(F)} = \frac{p(C \cap F)}{p(c)} = \frac{0{,}63}{0{,}7} = 0{,}9$

Remarque

Dans le cadre d'une loi **équirépartie** (« toutes les issues ont la même probabilité d'être réalisées ») on a :

$p(A \cap B) = \frac{nombres\ d'issues\ réalisant\ A \cap B}{ombres\ d'issues\ réalisant\ \ \Omega} = \frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$;

(Rappel la notation $|E| = card(E)$ désigne le cardinal d'un ensemble E c'est-à-dire le nombre d'éléments de E)

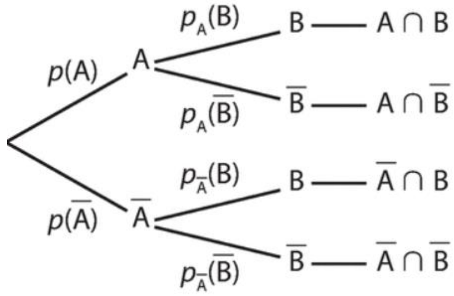
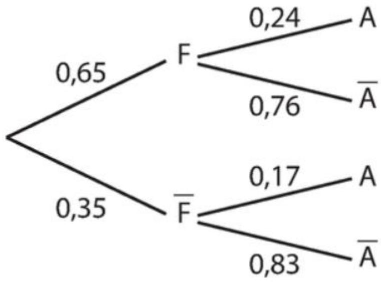
De même $p(A) = \frac{nombres\ d'issues\ réalisant\ A}{ombres\ d'issues\ réalisant\ \ \Omega} = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Donc la formule $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ devient $p_A(B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} * \frac{|\Omega|}{|A|} = \frac{|\boldsymbol{A \cap B}|}{|\boldsymbol{A}|}$

En résumé $\boldsymbol{p_A(B)} = \frac{|\boldsymbol{A \cap B}|}{|\boldsymbol{A}|}$

C'est ce que nous avions trouvé de manière intuitive dans le premier exemple de cette page. Nous avions trouvé que $p_D(M) = \frac{91}{117}$ avec $|M \cap D| = 91$ et $|D| = 117$

De même $p_M(D) = \frac{91}{194}$ avec $|M \cap D| = 91$ et $|M| = 194$

<table>
<tr><th colspan="3">Arbres pondérés et probabilité conditionnelle</th></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>On considère un événement A tel que :
$p(A) \neq 0$ et $p(\bar{A}) \neq 0$. Dans l'arbre pondéré ci-contre les probabilités des événements $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l'événement.</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="3">Démonstration (pas exigible)</th></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Dans un lycée, les élèves de Terminale faisant la spécialité Mathématique se répartissent ainsi :
• 65% de filles, dont 24% souhaitent faire la spé Maths.
• 35% de garçons, dont 17% souhaitent faire la spé Maths.
On tire au sort un élève au hasard et on considère les événements suivants :
• « F » l'élève est une fille.
• « A » l'élève souhaite faire une spé Maths.
On peut donc représenter la situation avec l'arbre ci-contre.
La probabilité que l'élève tiré soit une fille qui fasse la spé Maths est
$p(F \cap A) = p_F(A) * p(F) = 0{,}24 * 0{,}65 = 0{,}156$
La probabilité que l'élève tiré soit un garçon qui ne fasse pas la spé Maths est
$p(\bar{F} \cap \bar{A}) = p_{\bar{F}}(\bar{A}) * p(\bar{F}) = 0{,}35 * 0{,}83 = 0{,}2905$</td><td>
</td></tr>
</table>