Probabilités conditionnelles. Formules de Bayes

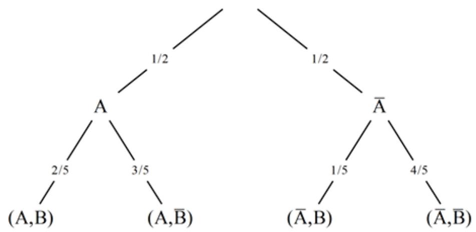
<table>
<tr>
<td>Formule de Bayes</td>
<td colspan="2">Soit $A_1, A_2 \ldots A_n$ un système complet d'événement et B un événement quelconque.

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) * P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) * P(A_i)}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Preuve</td>
<td colspan="2">$P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$ Definition de la probabilité conditionnelle
Or $P(B \cap A_i) = P_{A_i}(B) * P(A_i)$ Autre manière d'utiliser la probabilité conditionnelle.
En utilisant la formule des probabilités totales il vient $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) * P(A_i)$
Nous avons donc :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) * P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) * P(A_i)}$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Exemple</td>
<td colspan="2">Dans un laboratoire on a fait les constats suivants :
• Si une souris porte l'anticorps A alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B.
• Si une souris ne porte pas l'anticorps A alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B
Une souris a une probabilité de 50% de porter l'anticorps A. Quelle est la probabilité pour une souris de porter l'anticorps A si elle porte l'anticorps B ?</td>
</tr>
<tr>
<td>Représentons ci-contre la situation à l'aide d'un arbre pondéré. Nous voyons grâce à cet arbre que nous disposons de $P_A(B) = \frac{2}{5}$. Mais ce n'est pas l'objet de la question. En effet le problème nous demande $P_B(A)$. Il nous faut donc inverser le conditionnement.
C'est là que la formule de Bayes prend tout son sens.
Nous partons de :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$
$$P(B \cap A) = P_A(B)P(A)$$
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$
$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$$

Donc la formule de Bayes dans ce cas devient :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})} = \frac{\frac{2}{5} * \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} * \frac{1}{2} + \frac{1}{5} * \frac{1}{2}}$$
$$P_B(A) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{5} * \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>