Probabilités conditionnelles. Notions d'indépendance

Cours.

Notion d'indépendance.

Dans ce chapitre A et B sont deux événements tels que p(A)≠0 et p(B)≠0

Définition — **Indépendance de deux événements**

On dit que A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$

Cela signifie que l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B

Remarque

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$. La relation d'indépendance est symétrique.

Exemple

On donne dans le tableau ci-contre le tableau des licenciés d'un club. On tire au hasard une personne dans cette population. On considère les événements

A : « La personne est adulte »

B : « La personne pratique le Basket-Ball »

On constate que $p(A) = \frac{132}{528} = 0{,}25$ et $p_B(A) = \frac{45}{180} = 0{,}25$

Donc $p(A) = p_B(A)$. Les évènements A et B sont indépendants.

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

Propriété

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

Démonstration

$P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$. Lorsque A et B sont indépendants on a $P_A(B) = P(B)$. On en déduit $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$ et réciproquement.

Exemple

Dans l'exemple précédent soit G l'événement « La personne pratique la gymnastique »

On a alors $p(A) = \frac{132}{528} = \frac{1}{4}$; $p(G) = \frac{101}{528} = 0{,}25$;$p(A) * p(G) = \frac{1}{4} * \frac{101}{528} \approx 0{,}048$

D'autre part $p(A \cap G) = \frac{14}{528} \approx 0{,}027$ donc $p(A \cap G) \neq p(A) * p(G)$. Les deux événements ne sont pas indépendants.

Propriété

Lorsque A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ le sont aussi de même que $\bar{A}$ et B de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Démonstration (pas exigible)

Définition — **Indépendance de deux épreuves**

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une succession d'épreuves indépendantes.

Exemple

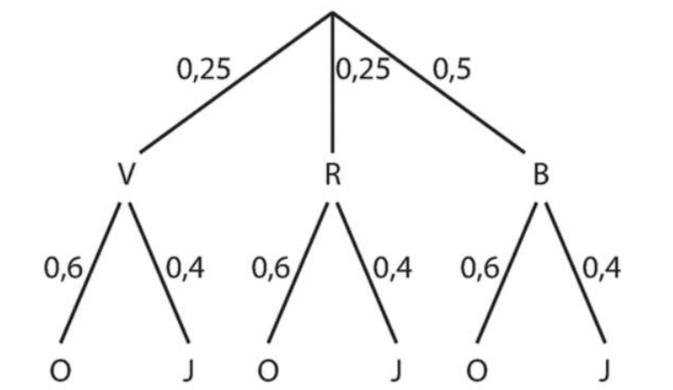
Lorsque l'on réalise une succession de deux tirages dans une urne « avec remise » on considère qu'il y a indépendance entre les deux épreuves.

Propriété

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre dont les pondérations sont les probabilités (non conditionnelles) des différents résultats pour chacune des épreuves ou sous la forme d'un tableau à deux entrées

Exemple

On place 1 boule verte, 1 boule rouge et 2 boules bleues dans une urne 1 et 3 boules oranges et 2 boules jaunes dans une urne 2. On tire successivement 1 boule de la première urne puis une boule de la deuxième. Les deux tirages sont donc indépendants. On peut avoir les représentations suivantes :



Épreuve 2 \ Épreuve 1	V	R	B
O	$0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$	$0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$	$0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$
J	$0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$	$0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$	$0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$

$p(V \cap O) = 0{,}15$; $p(R \cap O) = 0{,}15$; $p(B \cap O) = 0{,}15$

$p(V \cap J) = 0{,}1$; $p(R \cap J) = 0{,}1$; $p(B \cap J) = 0{,}2$