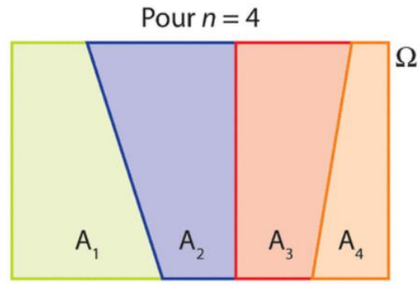
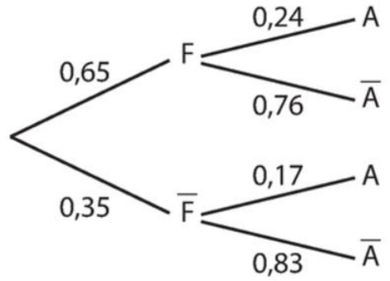
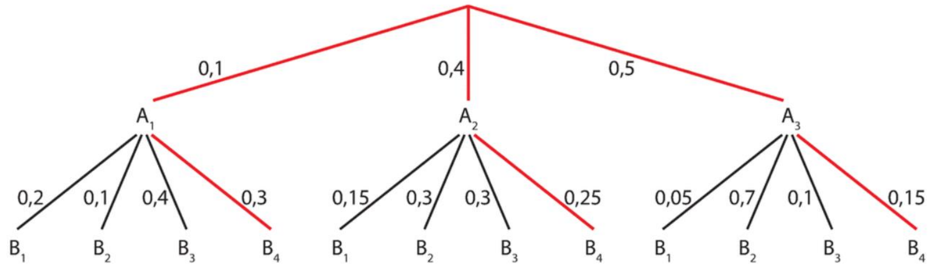
Probabilités conditionnelles. Formules des probabilités totales.

Cours.

<table>
<tr><th colspan="4">Partition de l'univers, formule des probabilités totales</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Partition de l'univers</td><td>Soit n tel que $n \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$.
On considère $A_1, A_2 \ldots A_n$ n événements de probabilités non nulles. Ces événements forment une partition de l'univers Ω (ou un système complet d'événements) si :
• Ils sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
• $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="3">Un événement A et son événement contraire $\bar{A}$ forment un système complet d'événements de l'univers Ω</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">Expérience : je jette un dé à 6 faces.
$A_1(\text{Le résultat est } 1), A_2(\text{Le résultat est soit } 2\text{, soit } 3), A_3(\text{Le résultat est} > 3)$ forment un système complet d'événements.</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>Formule des probabilités totales (cas particulier)</td><td colspan="2">Soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\bar{A}) \neq 0$
La probabilité de B est donnée par la formule
$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p_A(B)p(A) + p_{\bar{A}}(B)p(\bar{A})$</td></tr>
<tr><th colspan="4">Démonstration (pas exigible)</th></tr>
<tr><td>Exemple :</td><td colspan="2">Dans un lycée, les élèves de Terminale faisant la spécialité Mathématique se répartissent ainsi :
• 65% de filles, dont 24% souhaitent faire la spé Maths.
• 35% de garçons, dont 17% souhaitent faire la spé Maths.
On tire au sort un élève au hasard et on considère les événements suivants :
• « F » l'élève est une fille.
• « A » l'élève souhaite faire une spé Maths.
On peut donc représenter la situation avec l'arbre ci-contre.
$p(A) = p(F \cap A) + p(\bar{F} \cap A) = p_F(A)p(F) + p_{\bar{F}}(A)p(\bar{F})$
$= 0{,}24 * 0{,}65 + 0{,}17 * 0{,}35 = 0{,}2155$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Propriété :</td><td>Formule des probabilités totale (cas général)</td><td colspan="2">Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ et $B_1, B_2 \ldots B_m$ deux partitions de l'univers. Pour i entier entre 1 et m :
$p(B_i) = p(B_i \cap A_1) + p(B_i \cap A_2) + \ldots p(B_i \cap A_n) = p_{A_1}(B_i)p(A_1) + p_{A_2}(B_i)p(A_2) + \ldots p_{A_n}(B_i)p(A_n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exemple :</td><td colspan="3">Considérons l'arbre pondéré ci-contre où $A_1, A_2, , A_3$ et B_1, B_2, B_3, B_4 forment deux partitions de l'univers.
$p(B_4) = p(B_4 \cap A_1) + p(B_4 \cap A_2) + p(B_4 \cap A_3) = p_{A_1}(B_4)p(A_1) + p_{A_2}(B_4)p(A_2) + p_{A_3}(B_4)p(A_3) = 0{,}3 * 0{,}1 + 0{,}25 * 0{,}4 + 0{,}15 * 0{,}5 = 0{,}205$</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
</table>