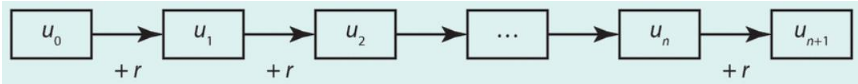
Suites arithmétiques, géométriques

Suites arithmétiques

Définition	**Suite arithmétique**	Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$ 
Exemple	La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = -2;\ u_1 = 1;\ u_2 = 4;\ u_3 = 7;\ u_4 = 10$ ….	
Remarque	Pour démontrer qu'une suite est arithmétique il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.	
Propriété	Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + r * n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ $u_n = u_p + r * (n - p)$	

Démonstration

$u_{p+1} = u_p + r$;
$u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2r$
$u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 2r + r = u_p + 3r$
……
$u_n = u_{n-1} + r = u_p + (n - p - 1)r + r = u_p + (n - p)r$

Cas particuliers :
$p = 0$; $u_n = u_0 + nr$
$p = 1$; $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Propriété	**Sens de variation**	• Si $r > 0$ (u_n) est strictement croissante • Si $r < 0$ (u_n) est strictement décroissante • Si $r = 0$ (u_n) est constante

Démonstration

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ donc si } \begin{Bmatrix} r > 0\ (u_n) \text{est strictement croissante} \\ r < 0\ (u_n) \text{est strictement décroissante} \\ r = 0\ (u_n) \text{ est constante} \end{Bmatrix}$$

Suites géométriques

Définition	**Suite géométrique**	Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q * u_n$ $u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$
Exemple	La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = 0{,}5$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 4$; $u_4 = 8$ ….	
Remarque	Pour démontrer qu'une suite est géométrique il suffit de montrer si les termes sont non nuls que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q.	
Propriété	Soit (u_n) une suite géométrique de raison q • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 * q^n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ $u_n = u_p * q^{n-p}$	

Démonstration

$u_{p+1} = qu_p$;
$u_{p+2} = q *\ u_{p+1} = q * qu_p = q^2 u_p$
$u_{p+3} = q *\ u_{p+2} = q *\ q^2 u_p = q^3 u_p$
……
$u_n = q * u_{n-1} =\ q * q^{n-p-1} u_p = q^{n-p}\ u_p$

Cas particuliers :
$p = 0$; $u_n = q^n u_0$
$p = 1$; $u_n = q^{n-1} u_1$

Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$

Si $q > 1$	Si $0 < q < 1$	Si $q = 0$ ou $q = 1$	Si $q < 0$
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement croissante Si $u_0 < 0$ alors (u_n) strictement décroissante	Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement décroissante Si $u_0 < 0$ alors (u_n) strictement croissante	(u_n) constante	(u_n) n'est pas monotone

Démonstration

$$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q-1)u_n$$

- Si $q = 0$ la suite est constante à 0
  Si $q = 1$ la suite est constante.
- Si $q < 0$ les termes de la suite changent de signe l'un après l'autre. La suite (u_n) n'est pas monotone

- Si $q > 1$
  Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$
  $u_{n+1} > u_n$ La suite est strictement croissante.
  Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont < 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n < 0$
  $u_{n+1} < u_n$ La suite est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$
  Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n < 0$
  $u_{n+1} < u_n$ La suite est strictement décroissante.
  Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont < 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$
  $u_{n+1} > u_n$La suite est strictement croissante.

Sommes	
Propriété	Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Démonstration	
Soit $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots n$. Ecrivons S_n d'abord par ordre croissant, puis par ordre décroissant $S_n = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots (n-1) + \ n$ $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots 2 \qquad + \ 1$ Additionnons ensuite ces deux lignes il vient : $2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots (n+1)$ Le nombre de $(n+1)$ est égal à n donc $2S_n = n(n+1) \rightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	
Propriété	Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$ on a $1 + q + q^2 + \cdots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Démonstration	
Soit $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots q^n$; $qS_n = q + q^2 + \cdots + \ q^n + q^{n+1}$ $S_n - \ qS_n = (1 + q + q^2 + \cdots q^n) - (\ q + q^2 + \cdots + \ q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$ $S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$ $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)}$ $(q \neq 1\ )$	