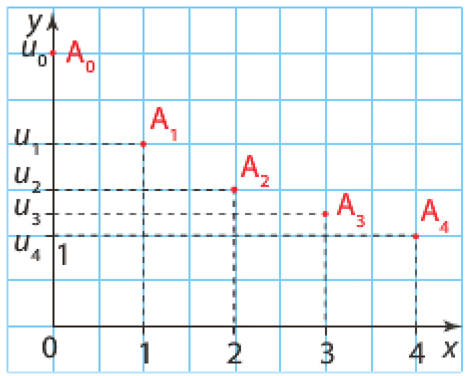
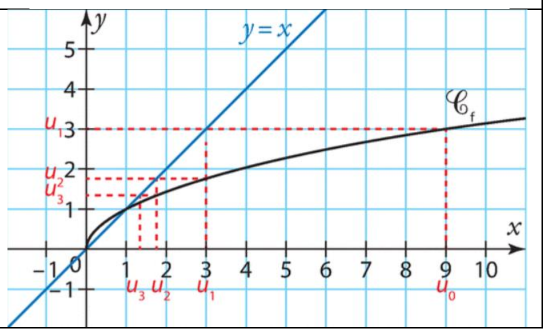
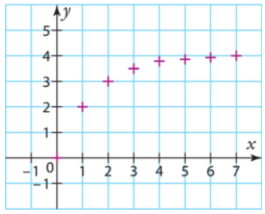
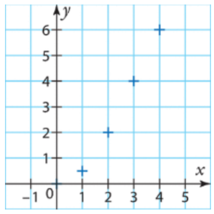
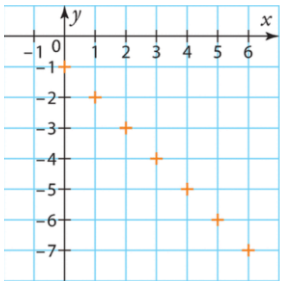
Suites numériques. Cours.
Modes de génération d'une suite. Représentation graphique. Sens de variation

Qu'est ce qu'une suite numérique ?		
Définition	Une suite u est une fonction qui à tout entier naturel n associe un nombre réel, noté $u(n)$ ou u_n. u_n est appelé le **terme d'indice n ou de rang n**.	
Notation	La suite se note u ou avec des parenthèses : (u_n).	$\boldsymbol{u : n \to u_n}$
Exemple	Considérons u la suite des entiers naturels impairs. $\boldsymbol{u_0 = 1}$; $\boldsymbol{u_1 = 3}$; $\boldsymbol{u_2 = 5}$; $\boldsymbol{u_3 = 7}$ ...	

Modes de génération d'une suite numérique			
Suite définie par une formule explicite	**Définition**	Soit f une fonction définie sur [0 ; +∞[On peut définir u en posant pour tout $\boldsymbol{n}$ de $\mathbb{N}$ $u_n = f(n)$	
	Exemple	Soit f : [0 ; +∞[→ $\mathbb{R}$ $x \to x^2$	Nous pouvons définir la suite u par $u_n = f(n)$. $\boldsymbol{u_0 = 0}$; $\boldsymbol{u_1 = 1}$; $\boldsymbol{u_2 = 4}$; $\boldsymbol{u_3 = 9}$ ...
Suite définie par récurrence	**Définition**	Ce procédé signifie que l'on donne le terme initial d'une suite et une relation permettant de déduire chaque terme à partir du précédent. Une telle relation est appelée **relation de récurrence.**	
	Exemple	Soit u définie par u_0 = 1 et u_{n+1} = 2u_n – 3 $\boldsymbol{u_0 = 0}$; $\boldsymbol{u_1 = -1}$; $\boldsymbol{u_2 = -5}$; $\boldsymbol{u_3 = -13}$ ...	

Représentation graphique		
La représentation graphique dans un repère des termes d'une suite u est l'ensemble des points isolés de coordonnées (0 ; u_0), (1 ; u_1), (2 ; u_2), (3 ; u_3), (4 ; u_4) … (n ; u_n) …		
Exemples	Suite définie de manière explicite On considère la suite u_n définie par : Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = \frac{6}{n+2}}$ $\boldsymbol{u_0 = 3}$; $\boldsymbol{u_1 = 2}$; $\boldsymbol{u_2 = \frac{3}{2}}$; $\boldsymbol{u_3 = \frac{6}{5}}$; $\boldsymbol{u_4 = 1}$; Les points $\boldsymbol{A_0(0;3), A_1(1;2), A_2\left(1;\frac{3}{2}\right), A_3\left(3;\frac{6}{5}\right), A_4(4;1)}$ sont les cinq premiers points de la représentation graphique de cette suite.	
	Suite définie par récurrence On considère la suite u_n définie par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ avec $u_0 = 9$ (Utilisation de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe de la fonction $f : x \to \sqrt{x}$)	

<table>
<tr><th colspan="3">Sens de variation</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">
Dire qu'une suite u est croissante à partir du rang k signifie que pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$
Dire qu'une suite u est décroissante à partir du rang k signifie que pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$
Dire qu'une suite u est constante à partir d'un certain rang signifie que pour tout n ≥ k $u_{n+1} = u_n$
Dire qu'une suite u est monotone à partir d'un certain rang signifie que pour tout n ≥ k u est soit croissante, soit décroissante
</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">Comme pour les fonctions si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes on parle alors de suite, strictement croissante, strictement décroissante ….</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite</td><td rowspan="2">Etude du signe de :
$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$</td><td>
Si $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0}$ (à partir d'un certain rang) alors la suite est strictement croissante (à partir de ce rang)
Si $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$ (à partir d'un certain rang) alors la suite est strictement décroissante (à partir de ce rang)
</td></tr>
<tr><td>Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n + n^2$
Pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n = n^2$. $n^2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ (pour $n \geq 1$). La suite (u_n) est donc strictement croissante (à partir du rang 1).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparer $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ à $\mathbf{1}$</td><td>Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs (à partir d'un certain rang n_0)
Si $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}} > \mathbf{1}$ (à partir d'un rang n_1 tel que $n_1 \geq n_0$) alors (u_n) strictement croissante (à partir du rang n_1).
Si $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}} < \mathbf{1}$ (à partir d'un rang n_1 tel que $n_1 \geq n_0$) alors (u_n) strictement décroissante (à partir du rang n_1).
</td></tr>
<tr><td>Exemple : soit (u_n) la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 5 * 3^n$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 * 3^{n+1}}{5 * 3^n} = 3$$
$\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}} > 1$ donc la suite est strictement croissante.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Notion de limite d’une suite</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Définitions</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">Une suite (u_n) a pour limite un nombre réel lorsque n tend vers +∞, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l’on veut en prenant n suffisamment grand. On dit que (u_n) converge vers l en +∞ ou que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$</td></tr>
<tr><td>Exemple : On observe sur la figure ci-contre que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4, donc on peut penser que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$</td><td colspan="2">Une suite (u_n) a pour limite +∞ lorsque n tend vers +∞, si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l’on veut en prenant n suffisamment grand. On dit que (u_n) diverge en +∞ ou que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$</td></tr>
<tr><td>Exemple : On observe sur la figure ci-contre que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus grands, donc on peut penser que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$</td><td colspan="2">Une suite (u_n) a pour limite -∞ lorsque n tend vers -∞, si les termes u_n deviennent tous aussi petits que l’on veut en prenant n suffisamment grand. On dit que (u_n) diverge en +∞ ou que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$</td></tr>
<tr><td>Exemple : On observe sur la figure ci-contre que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus petits, donc on peut penser que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$</td><td>
</td></tr>
</table>