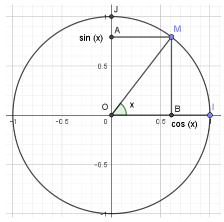
Coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique

Définition — **cosinus et sinus**

Pour tout nombre réel x, le cosinus et le sinus de x, notés $\cos x$ *et* $\sin x$ sont les coordonnées du point M_x image de x sur le cercle trigonométrique. On écrit alors $M_x(\cos x\,;\sin x)$



Exemple

- Le réel 0 est associé au point I sur le cercle trigonométrique. On obtient alors $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$
- Le réel $\frac{\pi}{2}$ est associé au point J sur le cercle trigonométrique. On obtient alors $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Remarque

Cette définition est compatible avec la définition du cosinus et du sinus donnée au collège. En effet regardons le shéma ci-dessus. Dans le triangle OBM rectangle en B on a
$\cos x = \frac{OB}{OM} = \frac{x_M}{1} = x_M$ De même $\sin x = \frac{OA}{OM} = \frac{y_M}{1} = y_M$

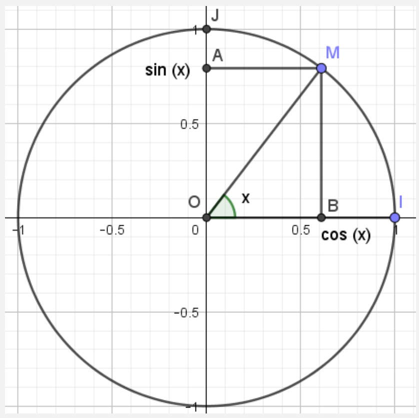
Propriétés

Pour tout nombre réel x

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin\ x \leq 1$

Démonstration

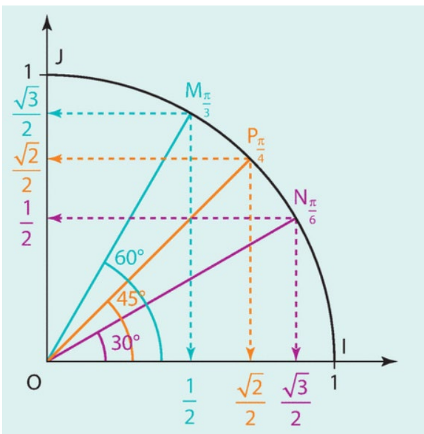
Dans le triangle OBM rectangle en B le théorème de Pythagore nous dit que $OM^2 = OB^2 + BM^2 = OB^2 + OA^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$
Or $OM^2 = 1$ donc $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
-1 et 1 sont les abscisses minimales et maximales du point M donc
$-1 \leq \cos x \leq 1$
-1 et 1 sont les ordonnées minimales et maximales du point M donc
$-1 \leq \sin\ x \leq 1$



Propriétés

Soit M_x un point du cercle trigonométrique, image d'un réel x. Alors :

Angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$ $\cos \widehat{IOM}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$ $\sin \widehat{IOM}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration

Nous allons démontrer ici que $\cos\frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

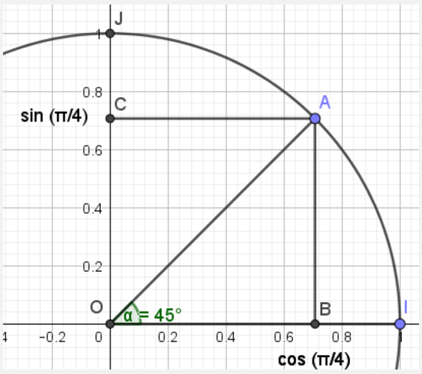
Dans le triangle OAB rectangle en B, $\widehat{OAB} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi-\pi-2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \widehat{BOA}$

Donc le triangleOAB est isocèle en B. $(AB = BO)$.

Dans le triangle OAB rectangle en B, le théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que $OA^2 = OB^2 + BA^2 = OB^2 + OB^2 = 2OB^2$ Mais $OA^2 = 1^2 = 1$ donc

$$OB^2 = \frac{1}{2} \rightarrow OB = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\frac{\pi}{4} = OC = AB = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Nous allons maintenant démontrer que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} et\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Considérons le triangle AOB. Il est isocèle en O (OA=OI) et $\widehat{IAO} = \frac{\pi}{3}$

$$\widehat{AIO} = \widehat{IAO} = \frac{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

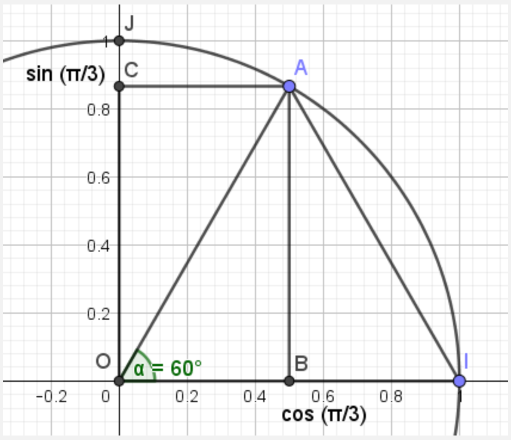
Chaque angle vaut $\frac{\pi}{3}$ radians donc le triangle est équilatéral.

$\cos\frac{\pi}{3} = OB = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}$;

Dans le triangle OAB rectangle en B, le théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que $OA^2 = OB^2 + BA^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + BA^2$. Mais $OA^2 = 1^2 = 1$ donc

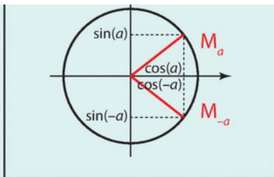
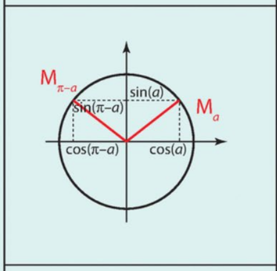
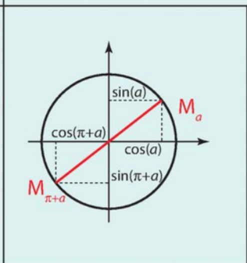
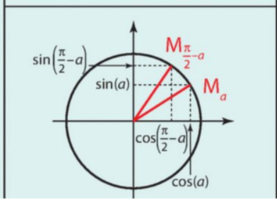
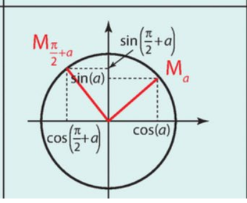
$$1 = \frac{1}{4} + BA^2 \rightarrow BA^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow BA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = OC = BA = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



Propriétés — **Angles associés**

Par différentes symétries on obtient les relations suivantes :

	$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$	
	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$