Cours : variables aléatoires.

Variable aléatoire

Définition

E est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Définir **une variable aléatoire** sur E, c'est associer un réel à chaque issue.

Notation

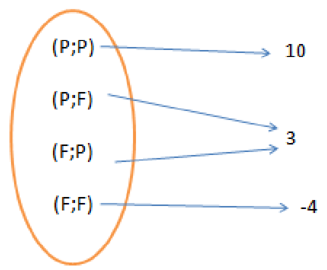
Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z ...
Lorsque x désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté « $X = x$ »

Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note F lorsque l'on obtient Face et P lorsque l'on obtient Pile.

Les issues de cette expérience aléatoire sont :$(P;P), (F;P), (P;F), (F;F)$. On gagne 5€ chaque fois que sort Pile et on perd 2€ chaque fois que sort Face.
On définit ainsi une variable aléatoire X qui prend les valeurs -4, 3 et 10.

L'événement « X=3 » est constitué des issues (P ;F) et (F ;P)
$+5$ (pour Le côté Pile) -2 (Pour le côté Face). $5 - 2 = 3$



Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Une loi de probabilité est définie sur un ensemble E d'issues.
x_1 , x_2 , ... x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire définie sur E.

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur de x_i prise par X, la probabilité de l'événement $(X = x_i)$

Valeur de X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe ci-dessus. La loi de probabilité de la variable X est définie dans le tableau ci-contre.
En effet $P(X = -4) = P(\ 'FF'\ ) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$P(X = 3) = P(\ 'FP'\ ) + P(\ 'PF') = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 10) = P(\ 'PP'\ ) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

x_i	-4	3	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Espérance d'une variable aléatoire		
Définition	X est une variable aléatoire définie sur E qui prend les valeurs x_1 , x_2 , ... x_n. L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ tel que : $E(X) = x_1 p_1 + \dots x_n p_n$	<table><tr><td>Valeur de X</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\dots$</td><td>x_n</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>$\dots$</td><td>p_n</td></tr></table>
Exemple	Toujours avec le même exemple : $E(X) = P(X = -4) * (-4) + P(X = 3) * 3 + P(X = 10) * 10 = \frac{1}{4} * (-4) + \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{4} * 10 = -1 + 1{,}5 + 2{,}5 =$ 3 (euros). Cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois à ce jeu, un joueur peut espérer gagner 3€ en moyenne par partie.	
Définition	Pour tous nombres réels a et b on peut définir une nouvelle variable aléatoire en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre réel $ax_i + b$ Cette nouvelle variable aléatoire se note $aX + b$	
Exemple	Toujours avec le même exemple il est facile de construire la variable $Y = 3X - 1$. Je multiplie les gains et les pertes par 3 puis j'enlève un euro. X peut prendre les valeurs $-4, 3$ et 10. Y prendra donc les valeurs : $-13, 8$ et 29.	
Propriété	Soient a et b deux réels. $E(aX + b) = aE(X) + b$	
Démonstration (pas exigible)		
Exemple	$E(Y) = E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3 * 3 - 1 = 8$	

Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Définitions	• La variance de X est le nombre réel défini par : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots p_n(x_n - E(X))^2$ • L'écart type de X est le nombre défini par $\sigma(X) = \sqrt{V}(X)$
Exemple	Avec l'exemple de X précédent : $V(X) = \frac{1}{4}(-4-3)^2 + \frac{1}{2}(3-3)^2 + \frac{1}{4}(10-3)^2 = \frac{49}{4} + \frac{49}{4} = \frac{49}{2} = 24{,}5$ $\sigma(X) = \sqrt{V}(X) \approx 4{,}9$
Remarques	• Espérance, variance, écart-type sont à mettre en relation avec moyenne, variance et écart-type d'une série statistique. • La variance et l'écart type d'une variable aléatoire permettent de savoir si une variable aléatoire prend des valeurs plus ou moins proches de son espérance et donc si la variable prend des valeurs plus ou moins excentrées ou resserrées autour de son espérance.
Propriété	$V(aX + b) = a^2 V(X)$ $\sigma(aX + b) = \lvert a \rvert V(X)$
Démonstration (pas exigible)	

Espérance et simulation	
Propriété	Lorsque l'on crée un échantillon, de taille suffisamment grande, de valeurs prises par une variable aléatoire la moyenne des valeurs de cet échantillon est proche de la valeur de l'espérance de cette variable aléatoire.
Exemple	Reprenons l'exemple de X précédent. Supposons que l'on procède à 1000 * 2 = 2000 lancers de pièces. On aura donc 1000 résultats de la variable X. La moyenne de ces 1000 résultats sera proche de $E(X) = 3$
Remarque	Bien entendu plus la taille de l'échantillon sera importante, plus la moyenne des valeurs prises par X sera proche de l'espérance de X