Cours
fonctions linéaires et affines

Cours

Définition

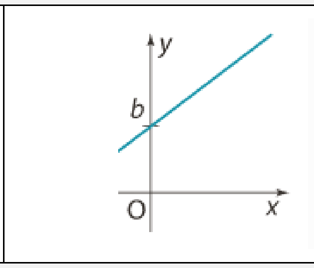
Une fonction **affine** est une fonction f définie sur R par $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ où a et b sont deux nombres réels connus.

Cas particuliers

- Si $b = 0$, f est **linéaire**. Exemple : $f(x) = 3x$ pour tout nombre x
- Si $a = 0$, f est **constante**. Exemple : $f(x) = 4$ pour tout nombre x

Théorème

La représentation graphique d'une fonction affine f définie par f$(x) = ax + b$ est une **droite**.



Remarque

Si $a = 0$ la fonction est constante, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Vocabulaire

Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite. Le nombre b est l'ordonnée à l'origine, car la droite passe par le point $B(0, b)$

Théorème

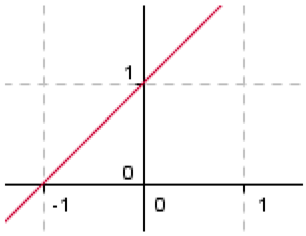
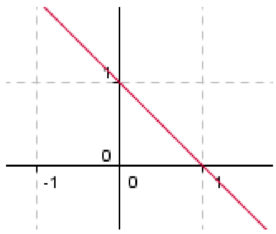
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Alors pour tous nombres u et v distincts, $a = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$;
a est aussi appelé **taux d'accroissement entre u et v**

Démonstration

$f(u) = au + b$; $f(v) = av + b$; $f(v) - f(u) = au + b - av - b = a(u - v)$; $a = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$

Théorème

Sens de variation :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	**Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$**
	

Démonstration

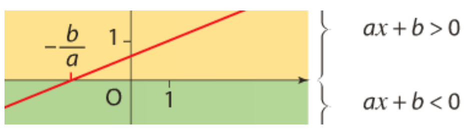
Supposons $a > 0$ Il suffit de montrer que si $v > u$ alors $f(v) > f(u)$. Soient u et v tels que $v > u$ $f(u) = au + b$ $f(v) = av + b$ donc $f(v) - f(u) = a(v - u)$ $a > 0$; $v - u > 0$ donc $f(v) - f(u) > 0$, $f(v) > f(u)$	Supposons $a < 0$ Il suffit de montrer que si $v > u$ alors $f(v) < f(u)$. Soient u et v tels que $v > u$ $f(u) = au + b$ $f(v) = av + b$ donc $f(v) - f(u) = a(v - u)$ $a < 0$; $v - u > 0$ donc $f(v) - f(u) < 0$, $f(v) < f(u)$

Propriété

Tableau de signe

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	



$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$