Fonctions

Principales étapes historiques de la notion de fonction

- Dans l'antiquité il n'y pas de notion abstraite de fonction ni de variable.
- La notion de fonction va commencer à être liée à une formule grâce à **Galilée (loi sur la chute des corps)** et **Kepler (trajectoire elliptique des planêtes).** Mais ces fonctions s'expriment à l'aide de phrases : « Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces temps »
  En gros Galilée exprime le fait que pour un mobile partant de l'altitude $z = 0,\ z(t) = Kt^2$ où z désigne l'altitude au temps t et K une constante
- Le mathématicien allemand **Leibniz** introduit en 1673 pour la première fois le terme **fonction,** venant du latin : $«functio, functiones »$ signifiant « accomplissement », « remplir une charge »
- En 1718 le suisse Jean Bernoulli propose la notation $\Phi(x)$ pour l'image de x par la fonction Φ
- Le mathématicien suisse **Leonard Euler** (1707, 1783) propose une troisième définition de la notion (combinaison d'opérations puisées dans les modes de calcul de l'époque) puis la notation $f(x)$ et une classification des fonctions :
  - Les fonctions algébriques (obtenues par des opérations algébriques)
  - Les fonctions transcendantes (trigonométriques, ln, exp ….)

Fonction, image, antécédent

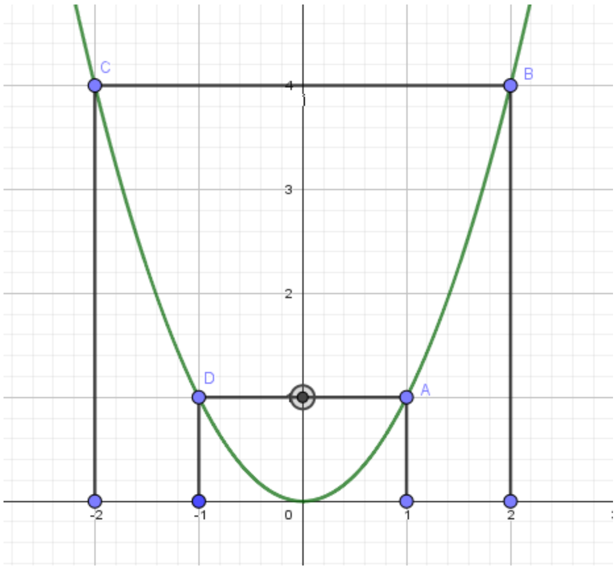
Définition	Soit D un intervalle de R (ou une réunion d'intervalles) • Fabriquer ou définir une fonction f de D dans R c'est associer à chaque nombre x de D un réel unique noté $f(x)$ • On dit que D est l'ensemble de définition de f, ou encore que f est définie sur D	
Exemple	Soit f la fonction suivante définie par $f(x) = \sqrt{x}$ Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ En effet seul un réel positif possède une racine carré. Impossible de trouver la racine carré d'un nombre négatif. On notera donc $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $x \to \sqrt{x}$	Soit g la fonction suivante définie par $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ Son ensemble de définition est $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ En effet la valeur $\{3\}$ est à interdire car sinon cela reviendrait à diviser par 0 ce qui est impossible. On notera donc $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ $x \to \dfrac{1}{x-3}$
Définition	• Le nombre $f(x)$ s'appelle l'image de x par f • Si un nombre k est l'image d'un nombre, c'est à dire si $f(x) = k$ alors on dit que x est l'antécédent de k • Lorsque $h(x)$ est donné explicitement on dit que l'on dispose de l'expression algébrique de la fonction h	
Exemple	Prenons la fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to x^2$	
	$h(9) = 9^2 = 81$ Donc 81 est l'image de 9 par la fonction f.	$h(3) = 3^2 = 9$ $h(-3) = (-3)^2 = 9$ Donc 9 possède deux antécédents par la fonction h qui sont 3 et -3
	L'expression algébrique de h est $h(x) = x^2$	
Remarque	Un nombre a toujours une seule image par une fonction donnée mais peut par contre avoir plusieurs antécédents.	
Définition	**Tableau de valeurs**	Un tableau de valeurs donne sur la première ligne (ou colonne) différentes valeurs de la variable x et en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne) les images $f(x)$ qui lui sont associées
Exemple	La fonction $f: x \to 3x + 5$ admet le tableau de valeurs ci-contre	(tableau ci-dessous)
Remarque	Un tableau de valeurs n'est pas unique.	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8	11	14

<table>
<tr><th colspan="3">Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>Définitions</td><td colspan="2">Soit f une fonction et D son ensemble de définition

La représentation graphique C (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un nombre de D
On dit que la courbe C a pour équation $y = f(x)$
</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="2">
Etant donné un point M de coordonnées (a, b) (avec a dans D), si $b = f(a)$ alors M appartient à C sinon M n'appartient pas à C
Dire qu'une courbe a pour équation $y = f(x)$ signifie que cette courbe est la représentation graphique de la fonction f
</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Sur la figure ci-contre nous voyons représentée la courbe de la fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

$h(1) = h(-1) = 1$ Donc la courbe passe par les points $A(1\,;1)$ et $B(-1\,;1)$

$h(2) = h(-2) = 4$ Donc la courbe passe par les points $C(2\,;4)$ et $B(-2\,;4)$</td><td>
</td></tr>
</table>