Fonctions
Variations, tableau de variations
Cours

Sens de variation : f est une fonction et I est un intervalle contenu dans son ensemble de définition

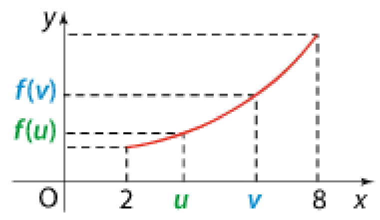
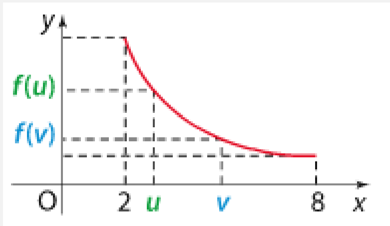
Approche Intuitive

- Une fonction croissante est une fonction dont la courbe « monte » de gauche à droite
- Une fonction décroissante est une fonction dont la courbe « descend » de gauche à droite.

Propriété :

- Lorsque la fonction est croissante les nombres $f(u)$et $f(v)$sont rangés dans le même ordre que u et v.
  Si $u \leq v$ alors $f(u) \leq f(v)$
- Lorsque la fonction est décroissante les nombres $f(u)$ et $f(v)$ sont rangés dans le sens inverse de u et v
  Si $u \geq v$ alors $f(u) \geq f(v)$

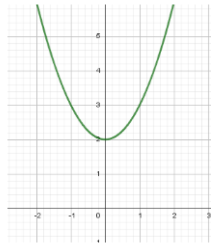
Exemples :

Fonction croissante La courbe « monte »	Fonction décroissante La courbe « descend »
	

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to x^2 + 2$

- Si $a > b > 0$ alors $a^2 > b^2 > 0$ donc $a^2 + 2 > b^2 + 2$ donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$
- Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2 > 0$ donc $a^2 + 2 > b^2 + 2$ la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$

Vérifions-le sur la courbe ci-contre



Définition	**Monotonie**	Si f ne change pas de variation sur un intervalle I, on dit que f est monotone sur I
Définition	**Croissance ou décroissance stricte**	Si sur un intervalle I, f est croissante (respectivement décroissante) sans être constante sur une partie de I, on dit que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Tableau de variation, Maximum, Minimum

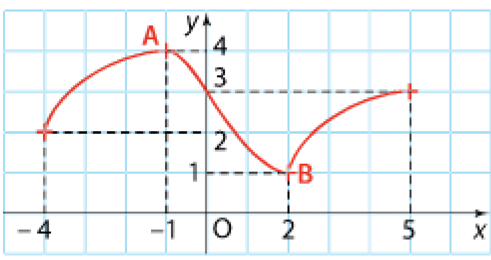
f est une fonction, I est un intervalle contenu dans son ensemble de définition, a est un nombre de I

Définitions

- Un tableau de variation indique les intervalles sur lesquels f est croissante (flèche montante), est décroissante (flèche descendante). Il indique aussi les valeurs remarquables de f
- Dire que $f(a)$ est le minimum de f signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction. Pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$
- Dire que f(a) est le maximum de f signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction. Pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$

Exemple

Soit la fonction f définie ci-dessous sur $[-4{,}5]$



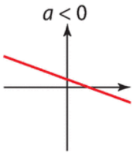
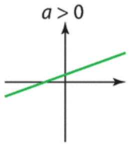
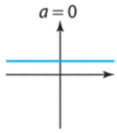
Voici son tableau de variations :

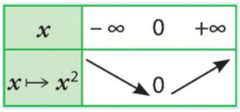
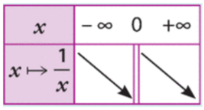
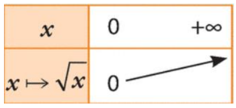
x	-4		-1		2		5
f	2	↗	4	↘	1	↗	3

On dit que 1 est le minimum de la courbe sur $[-4{,}5]$
Il est atteint lorsque $x = 2$
Le point $B(2{,}1)$ est le point le plus bas de la courbe.
On dit que 4 est le maximum de la courbe sur $[-4{,}5]$
Il est atteint lorsque $x = -1$
Le point   est le point le plus haut de la courbe.

Variation de fonctions de référence

f fonction affine

Propriété	Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.		
	Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$
			
Preuve	Prenons deux réels x_1 et x_2 avec $x_2 > x_1$ $\left\{\begin{array}{c} Si\ a > 0\ alors\ ax_2 > ax_1 \to ax_2 + b > ax_1 + b \to f(x_2) > f(x_1) \to f\ croissante \\ Si\ a < 0\ alors\ ax_2 < ax_1 \to ax_2 + b < ax_1 + b \to f(x_2) < f(x_1) \to f\ décroissante \\ Si\ a = 0\ alors\ ax_2 = ax_1 \to ax_2 + b = ax_1 + b \to f(x_2) = f(x_1) \to f\ constante \end{array}\right\}$		
Exemple	$\boldsymbol{f : x \to 3x + 2}$ est strictement croissante.	$\boldsymbol{g : x \to -2x + 5}$ est strictement décroissante.	

Fonction carré $\boldsymbol{f : x \to x^2}$	**Fonction inverse** $\boldsymbol{f : x \to \frac{1}{x}}$	**Fonction racine carrée** $\boldsymbol{f : x \to \sqrt{x}}$
Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$	Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$	Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$
		
Preuve		
Soient x_1 et x_2 deux réels avec $x_1 > x_2 > 0$ Nous avons $x_1^2 > x_2^2$ (En effet $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. $x_1 + x_2 > 0\ et$ $x_1 > x_2 \to x_1 - x_2 > 0$ donc $x_1^2 - x_2^2 > 0 \to$ $x_1^2 > x_2^2$) Cad : $f(x_1) > f(x_2)$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ Soient x_1 et x_2 deux réels avec $x_1 < x_2 < 0$ Nous avons $x_1^2 > x_2^2$ (Appliquer le même raisonnement que ci-dessus) Cad : $f(x_1) > f(x_2)$ Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$	Soient x_1 et x_2 deux réels avec $x_1 > x_2 > 0$ Nous avons $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$ (En effet $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$ $x_1 x_2 > 0\ et$ $x_1 > x_2 \to x_2 - x_1 < 0$ donc $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < 0 \to$ $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$) Cad : $f(x_1) < f(x_2)$ Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ Soient x_1 et x_2 deux réels avec $x_1 < x_2 < 0$ Nous avons $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ (Appliquer le même raisonnement que ci-dessus) Cad : $f(x_1) > f(x_2)$ Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$	Soient x_1 et x_2 deux réels avec $x_1 > x_2 > 0$ Nous avons $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$ (En effet $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}$ $= \frac{(\sqrt{x_1})^2 - (\sqrt{x_2})^2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{x_1 - x_2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}$ $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ $x_1 > x_2 \to x_1 - x_2 > 0\ donc$ $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} > 0 \to$ $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2})$ *)* *Cad :* $f(x_1) > f(x_2)$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$