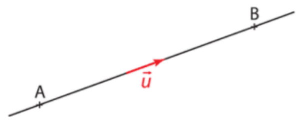
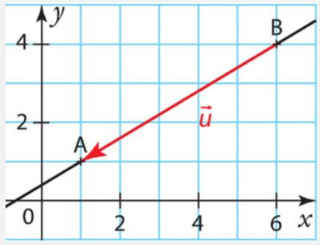
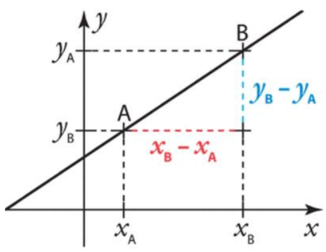
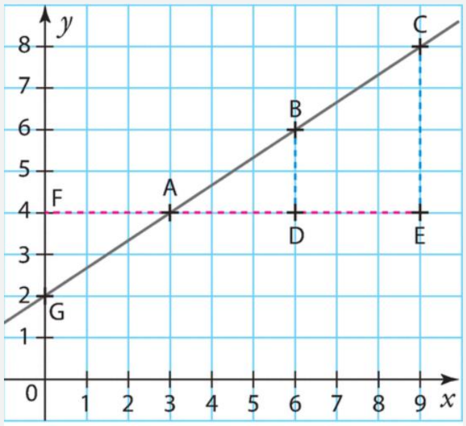
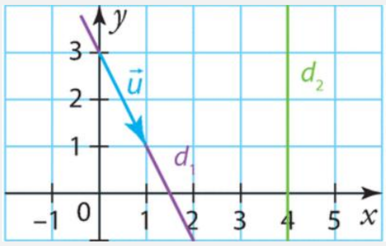
Droites du plan

<table>
<tr><th colspan="4">Droites du plan</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Vecteur directeur d'une droite</td><td>Soient A et B deux points distincts d'une droite d. Alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="3">Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique. (Il peut être remplacé par tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$)</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">Soient A(-2 ;4) et B(6 ;2). $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-2)\\2-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) mais le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ aussi. En effet $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.</td></tr>
<tr><td>Théorème</td><td colspan="3">Dans un repère orthonormé les coordonnées de l'ensemble des points $M(x;y)$ qui appartiennent à une droite d vérifient une relation du type $ax+by+c=0$ (où a,b et c sont des nombres réels.</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td colspan="3">Soit un point A de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et un vecteur $\vec{m}$ de coordonnées $\binom{u}{v}$
Le point M $\binom{x}{y}$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{m}\binom{u}{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$ colinéaire à $\vec{m}\binom{u}{v}$. Utilisons le déterminant cela donne $\det(\overrightarrow{AM},\vec{m})=0 \Leftrightarrow v(x-x_A)-u(y-y_A)=0$
$\Leftrightarrow vx-uy-vx_A-uy_A=0$ En posant $a=v, b=-u, c=-vx_A-uy_A$
nous avons bien une équation du type $ax+by+c=0$</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">La relation $ax+by+c=0$ s'appelle equation cartesienne de la droite d.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">Soit dans un repère le point $A(3;-1)$ et le vecteur $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Nous allons déterminer l'équation cartesienne de la droite (d) passant par le point $A(3;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
Un point $M(x;y)\in(d)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{m})=0 \Leftrightarrow$
$-2(x-3)-(y+1)=0 \Leftrightarrow -2x+6-y-1=0 \Leftrightarrow -2x-y+5=0$
$\boldsymbol{-2x-y+5=0}$ est l'équation cartesienne de (d)</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="3">Une droite possède une infinité d'équations cartesiennes. (Il suffit de mutliplier une équation par un nombre pour en obtenir une autre. Dans l'exemple précédent $-4x-2y+10=0$ est aussi une équation cartésienne de (d)
Si $a=0$ la droite est horizontale. (parallèle à l'axe des abscisses)
Si $b=0$ la droite est verticale. (parallèle à l'axe des ordonnées)</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="3">Soit une droite dont une équation cartesienne est $ax+by+c=0$.
Le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur d'une telle droite.</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td colspan="3">Soient A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ deux points de cette droite.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$. Posons le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$
Nous avons $\begin{cases}ax_A+by_A+c=0\\ax_B+by_B+c=0\end{cases}$ Soustrayons ces 2 équations. Il vient $a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)=0$
Cela signifie que $\det(\overrightarrow{AB},\vec{u})=0$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">La droite dont l'équation cartesienne est $2x-5y+2=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{5}{2}$</td></tr>
</table>

Exemples	Déterminons l'équation de la droite passant par le point $A(2\,;-1)$ et le point $B(3;4)$ Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\4-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) Un point M $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0\Leftrightarrow 5(x-2)-(y+1)=0\Leftrightarrow 5x-10-y-1=0\Leftrightarrow 5x-y-11=0$ $5x-y-11=0$ est l'équation cartésienne de (AB)		
Exemples	On cherche à tracer une droite dont une équation cartesienne est $-3x+5y-2=0$ • Soit on cherche deux points dont les coordonnées vérifient l'équation. A(1 ;1) et B(6 ;4) par exemple. Il ne reste plus qu'à les relier pour tracer la droite • Soit on trouve un point A(1 ;1) et on trouve un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ par exemple avec la formule $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ [2]		
Propriété	**Equation réduite**	• Toute droite non verticale admet une équation réduite de la forme $y=mx+p$ (m et p réels) où m s'appelle le coefficient directeur et p s'appelle l'ordonnée à l'origine. • Toute droite verticale a une équation réduite de la forme $x=k$	
Preuve	Soit une droite d'équation $ax+by+c=0$. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. La droite n'est pas verticale donc $b\neq 0$. L'équation $ax+by+c=0$ peut donc s'écrire $by=-ax-c$ soit $y=\frac{1}{b}(-ax-c)$ soit $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ En posant $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$, On a bien une équation de la forme $y=mx+p$		
Exemple	Soit une droite (d) d'équation cartesienne $-3x+5y-2=0$. Cette droite n'est pas verticale car $b=5\neq 0$ $-3x+5y-2=0\Leftrightarrow 5y=3x+2\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$ Cette dernière équation est l'équation réduite de la droite (d)		
Propriété	On considère la droite d'équation réduite $y=mx+p$ • Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite • Le point d'intersction de cette droite avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;p)$		
Preuve	• $y=mx+p\Leftrightarrow mx-y+p=0$ Donc cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ • Dans l'équation $y=mx+p$, si $x=0$ il vient $y=p$ donc l'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0\,;p)$		
Propriétés	**Signe du coefficient directeur**	Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation $y=mx+p$ • Si m>0 alors la droite « monte » • Si $m<0$ la droite « descend » • Si m=0 la droite est horizontale.	
Propriété	**Droites parallèles**	Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.	
Propriété	**Coefficient directeur**	Le coefficient directeur ou pente d'une droite (AB) avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est donné par : $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ si $x_B\neq x_A$	

<table>
<tr>
<td>Remarque</td>
<td colspan="2">• Si $x_B = x_A$ alors la droite est verticale d’équation réduite $x = x_A$
• m est donc le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d’un point à l’autre de la droite. Cela signfie que dans des cas simples, pour trouver m il suffit de se positionner sur la droite, de se décaler de 1 une unité vers la droite suivant la direction de l’axe des abscisses et de compter de combien d’unités il faut descendre ou monter selon la direction de l’axe des ordonnées pour retrouver la droite. Le coefficient directeur sera égal à ce dernier nombre.</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemples</td>
<td>Trouvons l’équation réduite de la droite ci-contre passant par les points $A(3\,;4)$ et $B(6;6)$
Cette droite n’est pas verticale donc elle admet une équation réduite du type $y = mx + p$
• On calcule d’abord le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-4}{6-3} = \frac{2}{3}$
• On sait déjà que $y = \frac{2}{3}x + p$
La droite coupe l’axe des ordonnées au point $G(0\,;2)$ donc $p = 2$.
passe par le pojnt $A(3\,;4)$
l’équation réduite de cete droite es $y = \frac{2}{3}x + 2$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple</td>
<td>Essayons de retrouver les équations réduites des droites d_1 et d_2 représentées ci-contre.
• Pour d_2 c’est simple.
La droite est verticale. Tous ses points ont une abscisse égale à 2. Son équation réduite est donc $x = 2$
• La droite d_1 n’est pas verticale. Elle admet donc une équation réduite du type $y = mx + p$. Cette droite coupe l’axe des ordonnées en $A(0\,;3)$. Donc $p = 3$.
A partir du point A nous constatons que si nous devons nous décaler de 1 sur la droite (déplacement horizontal) nous devons nous déplacer de -2 sur l’axe des ordonnées pour rejoindre la droite (déplacement vertical). Donc $m = -2$
L’équation réduite est $y = -2x + 3$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>