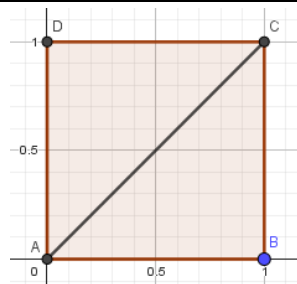


Historique

Pythagore est un mathématicien astronome et philosophe grec du VI^{ème} siècle avant J-C. Il crée notamment une école qui donne une interprétation religieuse des nombres : la fraternité pythagoricienne dont le principe de base est que tout nombre peut s'écrire soit sous la forme d'un nombre, soit sous la forme d'un carré

Or une longueur va lui poser problème, celle de la diagonale d'un carré de côté 1. Impossible de la mettre sous forme d'un nombre entier ou d'une fraction

Il va donc falloir créer un nouveau théorème



Nombres rationnels

Définitions	- L'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - L'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif. $= \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$		
Exemples	$\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\frac{6}{3} = 2$	$-45 \in \mathbb{Z}$	
Définitions	- L'ensemble des nombres décimaux noté $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier positif. - L'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul. On a l'habitude de les représenter par des fractions irréductibles.		
Exemples	$0,37 \in \mathbb{D}$ car $0,37 = \frac{37}{100} = \frac{37}{10^2}$	$\frac{1}{8} \in \mathbb{D}$ car $\frac{1}{8} = 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{125}{10^3}$	$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots \notin \mathbb{D}$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
Propriété	Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.		
Preuve	Nous allons procéder avec un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal. Alors il peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel. $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \rightarrow 10^n = 3 * a$ Donc cela implique que 3 divise 10^n . Nous savons qu'un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Or la somme des chiffres de 10^n fera toujours 1. Donc nous sommes arrivés à une contradiction. Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.		
Propriété	Un nombre décimal a un nombre fini de chiffres après la virgule.		
Exemple	$\frac{1}{4} = 0,25$ a deux chiffres après la virgule, c'est un nombre décimal. $\frac{2}{3} = 0,66666666$ possède une infinité de chiffres après la virgule. Ce n'est pas un nombre décimal.		
Propriété	Un nombre rationnel admet une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang.		
Exemple	$\frac{1}{3} = 0,33333$	$\frac{13193}{49950} = 0,26412412$	$2 = 2,0000$ $\frac{3}{4} = 0,750000$

Nombres réels

Préambule	Certains nombres ne rentrent pas dans les ensembles de nombres que nous avons déjà cités : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$. Pourtant ces nombres existent dans la nature.		
		$\sqrt{2}$ est la mesure de la diagonale d'un carré de côté 1	
	Ces nombres qui ont une existence réelle puisque ce sont des longueurs mais qui ne sont pas des nombres rationnels s'appellent des nombres réels.		
Définition	Soit une droite munie d'une origine et d'une graduation. L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'ensemble des nombres réels et se note $\mathbb{R}$. Un tel axe est appelé droite des réels .		
Propriété	Un nombre réel est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales.		

Inclusion des ensembles de nombre.

Propriété	Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont des nombres décimaux qui sont des nombres rationnels qui sont des nombres réels.		
	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$		
Exemple :	- On peut construire un segment de longueur $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient. Il n'est pas rationnel. C'est un nombre réel. - L'écriture décimale de π n'est pas périodique. Ce n'est pas un quotient. C'est un nombre réel. - Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait soit un irrationnel. $\sqrt{5}$ est irrationnel et $\sqrt{9}$ est un nombre entier.	