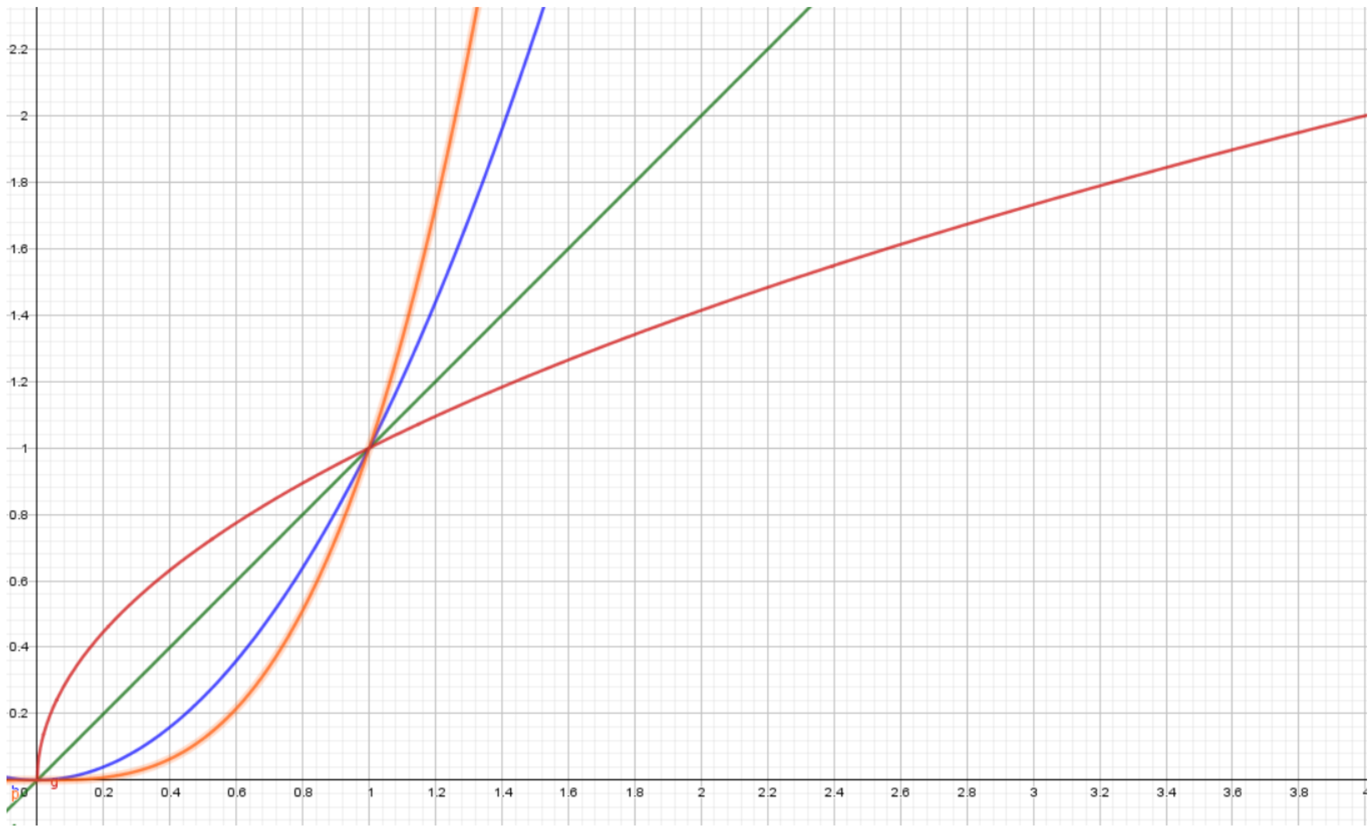
## Activité : position relative de courbes.

### Dans le bon ordre ?

Sur la figure ci-dessous sont représentées dans un repère les courbes des fonctions

$$f : x \to \sqrt{x}, g : x \to x, h : x \to x^2, i : x \to x^3$$




Démonstration

Nous voyons sur la courbe que :
Lorsque $0 < x < 1$ alors : $\sqrt{x} > x > x^2 > x^3$
Lorsque $1 < x$ alors : $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$

Nous allons le démontrer. Il faut découper la démonstration en 2.

- $0 < x < 1$
  $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$; $x^2 > 0$; $1 - x > 0$ donc $x^2 - x^3 > 0 \to \boldsymbol{x^3 < x^2}$
  $x - x^2 = x \ (1 - x)$; $x > 0$; $1 - x > 0$ donc $x - x^2 > 0 \to \boldsymbol{x^2 < x}$
  Il nous reste à comparer $x \to x$ et $x \to \sqrt{x}$. Comparons leur carré.
  $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Or $x > x^2$ Donc $\left(\sqrt{x}\right)^2 > x^2$. La fonction $x \to x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ cela signifie que les images des nombres sont rangées dans le même ordre que ces nombres.
  Nous en déduisons $\sqrt{x} > x$
  En résumé $\sqrt{x} > x > x^2 > x^3$
- $1 < x$
  $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$; $x^2 > 0$ ; $1 - x < 0$ donc $x^2 - x^3 < 0 \to \boldsymbol{x^3 > x^2}$
  $x - x^2 = x \ (1 - x)$; $x > 0$; $1 - x < 0$ donc $x - x^2 < 0 \to \boldsymbol{x^2 > x}$
  Il nous reste à comparer $x \to x$ et $x \to \sqrt{x}$. Comparons leur carré.
  $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Or $x < x^2$ Donc $\left(\sqrt{x}\right)^2 < x^2$. La fonction $x \to x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ cela signifie que les images des nombres sont rangées dans le même ordre que ces nombres.
  Nous en déduisons $\sqrt{x} < x$
  En résumé $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$