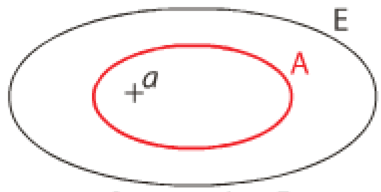
Probabilité . Loi équirépartie.
Cours

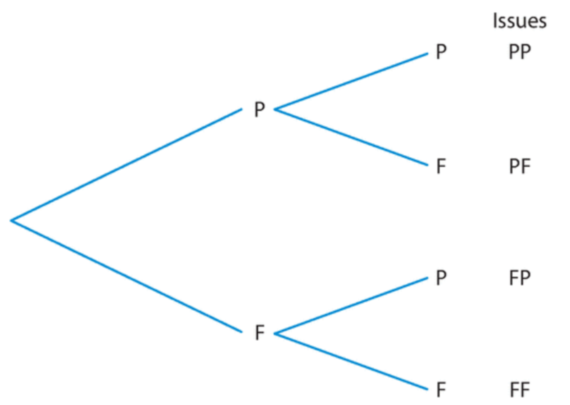
Loi de probabilité sur un ensemble fini	
Définitions :	Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut pas prévoir laquelle de ces issues sera réalisée.
	L'ensemble E=$\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ des issues d'une même expérience aléatoire est appelé **univers**.
Exemple :	L'expérience consistant à lancer un dé cubique dont les faces sont numérotées est une expérience aléatoire. L'ensemble des issues est {1, 2, … 6}

Loi de probabilité	
Définition :	Définir une **loi de probabilité** sur E, c'est associer à chaque issue x_i, un nombre positif $p_i$positif ou nul de telle façon que $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ = 1. Ce nombre p_i est appelé **probabilité** de l'issue x_i.
Exemple :	Si le dé de l'exemple précédent est équilibré on considère alors que chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître donc que $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{6}$.
Définition :	Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p, on parle de loi équirépartie. On a alors p = $\frac{1}{n}$.
Exemple	Je pioche au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de sortir un « 7 de cœur » ? Toutes les cartes ayant la même probabilité de sortir nous avons $p = \frac{1}{32}$

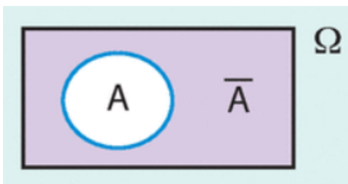
Notion d'événement		
Définition :	Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire. Sur le shéma ci-contre A est une partie de E.	 On note : A ⊂ E.
Exemple	On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Je m'interresse aux évenements A (« Le résultat est pair ») et B(« Le résultat est ≥ 4) L'évenement A est composé des issues $\{2,4,6\}$ L'évenement B est composé des issues $\{4,5,6\}$	
Vocabulaire :	• Dire qu'une issue a de l'expérience aléatoire **réalise** l'événement A signifie que a est un élément de l'ensemble A. On note **a** ∈ $\boldsymbol{A}$ • L'ensemble vide noté Ø est appelé événement impossible, aucune issue ne le réalise. • E est appelé événement certain. Toutes les issues le réalisent.	
Exemple :	On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. • L'événement « obtenir 7 » est l'événement impossible. • L'événement « obtenir un nombre entre 1 et 6 » est l'événement certain.	

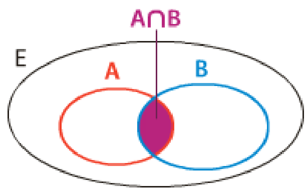
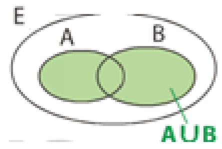
<table>
<tr><th colspan="3">Probabilité d'un événement</th></tr>
<tr><td>Définition :</td><td colspan="2">Une loi de probabilité est définie sur un ensemble E. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On la note p(A)</td></tr>
<tr><td>Conséquences :</td><td colspan="2">Aucune issue ne réalise l'événement impossible. Donc $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$.
L'événement certain est réalisé par chacune des issues de E donc $\boldsymbol{p(E) = 1}$.
Pour tout événement A, $\boldsymbol{0 \leq p(A) \leq 1}$</td></tr>
<tr><td>Exemple :</td><td>Un dé est pipé, on attribue les probabilités ci-contre aux différentes faces.

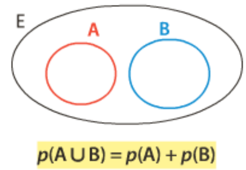
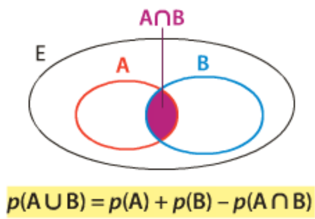
A est l'événement : « obtenir un résultat pair » : Il est réalisé par la sortie des faces 2, 4 et 6. Donc $p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.</td><td>
<table>
<tr><th>Face</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td>Probabilité</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Propriété :</td><td colspan="2">Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ dans\ A}{nombre\ d''issues\ dans\ E} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Je jette un dé bien équilibré. Je m'intéresse à la probabilité de l'événement B « Le résultat est ≥ 5 ». Le dé est bien équilibré. Nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité. (Toutes les issues ont la même probabilité d'être réalisées). L'événement B est constitué des issues $\{5\,;6\}$
Donc $P(B) = \frac{\boldsymbol{nombre\ d'issues\ dans\ A}}{\boldsymbol{nombre\ d''issues\ dans\ E}} = \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ cas\ favorables}}{\boldsymbol{nombre\ de\ cas\ possibles}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Remarque</td><td colspan="2">Pour évaluer le nombre de cas possibles, nous pouvons représenter les issues d'une expérience sous la forme d'un arbre.
Exemple : Je lance une pièce équilibrée en l'air deux fois de suite. Les résultats de cette expérience sont constitués par la suite des faces obtenues dans l'ordre. (Par exemple : « PF » pour Pile puis Face). Nous voudrions calculer P(« FF »). Représentons les résultats de l'expérience sous la forme d'un arbre :</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Nous utilisons la formule :
L'univers des possibles est composé de quatre issues équiprobables « PP, PF, FP et FF »
Nous sommes donc dans le cas d'une loi équirépartie

P(« FF ») = $\frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Opération sur les événements</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Evénement contraire</td><td>On considère une expérience aléatoire d'univers Ω
Soit A un évenement. L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$ est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit $\bar{A}$ est réalisé par les issues de Ω qui ne sont pas de A.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="3">$$\boldsymbol{p(A) + p(\bar{A}) = 1}$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">Dans le cas d'un lancer de dé. Soit A l'événement « obtenir un 1 ». $\bar{A}$: « obtenir un nombre entre 2 et 5 ». $p(\bar{\boldsymbol{A}}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$</td></tr>
</table>

Intersection et réunion d'événements. Définitions.		
Définitions	L'intersection de A et B est l'événement, noté **A ∩ B**, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B.	
	La réunion de A et B est l'événement, noté **A U B** formé des issues qui réalisent l'événement A **ou** l'événement B, c'est-à-dire au moins l'un des deux.	
Exemple	On tire au hasard l'un des nombres entiers de 1 à 10. On considère les événements : • A : « Le nombre tiré est divisible par 5 » • B : « Le nombre tiré est strictement inférieur à 6 » Alors $A = \{5\,;10\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,\}$ Donc $A\ \cap\ B\ = \{5\}$ et $A\ U\ B\ = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;10\}$	

Une formule fondamentale		
Propriété	Lorsque deux événements sont incompatibles, c'est-à-dire lorsque : $A\ \cap\ B\ = \emptyset$ on a: $\boldsymbol{p(A\ U\ B) = p(A) + p(B)}$	
Exemple	Soit l'expérience je jette un dé bien équilibré. Je m'intéresse aux événements A (Le résultat est ≥ 4) et B(Le résultat est ≤ 2) $A = \{4{,}5{,}6\}$ et $B = \{1{,}2\}$ $A\ \cap\ B\ = \emptyset$ (Les deux évènements sont disjoints) $\boldsymbol{A\ U\ B = \{1, 2, 4, 5, 6\}}$ $\boldsymbol{p(A\ U\ B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}}$	
Propriété	Dans le cas général : Pour tous les événements A et B : $\boldsymbol{p(A\ \cap\ B)\ +\ p(A\ U\ B)\ =\ p(A)\ +\ p(B)}$	
Exemple	Soit l'expérience je jette un dé bien équilibré. Je m'intéresse aux événements A (Le résultat est pair)et B(Le résultat est ≤ 2) $A = \{2{,}4{,}6\}$ et $B = \{1{,}2\}$ $A\ \cap\ B\ = \{2\}$ (Les deux évènements ne sont pas disjoints) $\boldsymbol{A\ U\ B = \{1, 2, 4, 6\}}$ $\boldsymbol{p(A\ U\ B) = \frac{4}{6};\ p(A\ \cap\ B) = \frac{1}{6}; P(A) = \frac{3}{6}\,; P(B) = \frac{2}{6}}$ Et on a bien $\boldsymbol{p(A\ \cap\ B)\ +\ p(A\ U\ B)\ =\ p(A)\ +\ p(B)}$	