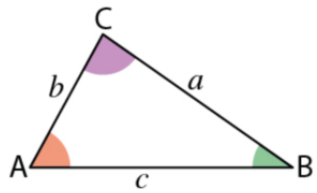
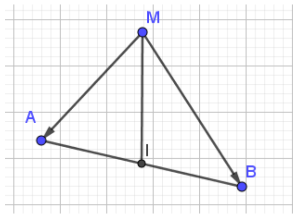
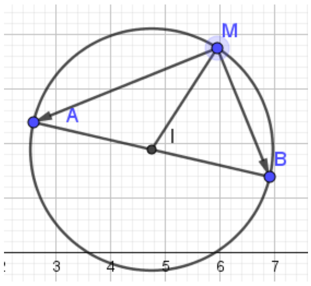
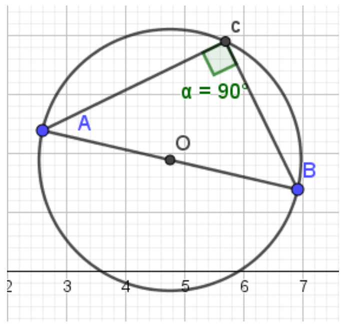
Applications du produit scalaire.

	Applications
Propriété Formule d'Al-kashi	Soit ABC un triangle quelconque. Nous noterons $a = BC, b = AC, c = AB$. La formule d'Al-kashi nous donne : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\widehat{BAC})$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos(\widehat{ABC})$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(\widehat{ACB})$ 
Preuve	$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $= c^2 + b^2 - 2\lVert\overrightarrow{AB}\rVert \lVert\overrightarrow{AC}\rVert \cos(\widehat{BAC}) = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$ La même méthode est à appliquer pour les 2 autres expressions.
Remarque	Dans le cas où le triangle est rectangle en A. $\widehat{BAC} = 90°$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$. La formule d'Al-kashi devient $a^2 = b^2 + c^2$. Nous avons retrouvé le théorème de Pythagore.
Exemple	Prenons un triangle IJK où $IJ = 5, JK = 6$ et $IK = 8$. On veut calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{JIK}$. Al-kashi nous donne $JK^2 = JI^2 + IK^2 - 2 * JI * IK * \cos\widehat{JIK}$. $\Leftrightarrow 6^2 = 5^2 + 8^2 - 2 * 5 * 8 * \cos\widehat{JIK}$ $\Leftrightarrow 36 = 25 + 64 - 80\cos\widehat{JIK} \Leftrightarrow 80\cos\widehat{JIK} = 53 \Leftrightarrow \cos\widehat{JIK} = \frac{53}{80}$; Cela nous donne $\widehat{JIK} \approx 49°$
Propriété	**Transformation d'une expression** Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ 
Démonstration	$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} = \boldsymbol{MI^2}$; $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}.\vec{0} = \mathbf{0}$; $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2}.\frac{\overrightarrow{AB}}{2} = -\frac{\boldsymbol{AB^2}}{\mathbf{4}}$ Nous avons donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \boldsymbol{MI^2} + \mathbf{0} - \frac{\boldsymbol{AB^2}}{\mathbf{4}} = \boldsymbol{MI^2} - \frac{\boldsymbol{AB^2}}{\mathbf{4}}$
Propriété	Etant donné deux points A et B, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre le segment [AB] 
Démonstration	$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}AB \quad (IM > 0)$ Donc l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$=0 est le cercle de centre I et rayon $\frac{AB}{2}$
Propriété	**Cercle et triangle rectangle** Un triangle ABC est rectangle en C si et seulement si le point appartient au cercle de diamètre [AB] avec C différent de A et de B 
Démonstration	Un triangle ABC est rectangle en C $\Leftrightarrow (CA) \perp (CB)$ avec C différent de A et de B $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$ avec C différent de A et de B $\Leftrightarrow C$ appartient au cercle de diamètrre [AB] avec C différent de A et de B